T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK MANTIK VE KÜMELER ÜZERİNDEKİ CEBİRSEL İŞLEMLER

ERKAN EKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAHRAMANMARAŞ 2016

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEZGİSEL BULANIK MANTIK VE KÜMELER ÜZERİNDEKİ CEBİRSEL İŞLEMLER

ERKAN EKER

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS
derecesi için hazırlanmıştır.

KAHRAMANMARAŞ 2016

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Erkan Eker tarafından hazırlanan "SEZGİSEL BULANIK MANTIK VE KÜMELER ÜZERİNDEKİ CEBİRSEL İŞLEMLER" adlı bu tez, jürimiz tarafından 03/02/2016 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL (DANIŞMAN) …….
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM (ÜYE) …….
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU (DANIŞMAN) (ÜYE) ……..
Matematik Anabilim Dalı
Mersin Üniversitesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. M. Mustafa ŞEKKELİ …….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, alıntı yapılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

ERKAN EKER

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

SEZGİSEL BULANIK MANTIK VE KÜMELER ÜZERİNDEKİ CEBİRSEL İŞLEMLER
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ERKAN EKER

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde çalışmada yer alan kavramlar, tarihsel gelişim, teorik yaklaşım ve karşılaştırmalar yapılmıştır. Klasik mantık, bulanık mantık ve sezgisel bulanık mantıktaki temel küme kavramları ve önermeler kullanılarak temel tanım teoremleri verilmiştir. Üçüncü bölümde ise sezgisel bulanık mantık ile ilgili yeni teoremler ve ispatlar verilmiştir. Özellikle sezgisel bulanık mantıktaki ◊ ve □ modal operatörleri kullanılarak yeni eşitlikler bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sezgisel bulanık mantık ve kümeler, Bulanık mantık ve kümeler, Klasik mantık ve kümeler

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Şubat / 2016

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL
Sayfa sayısı: 47

ALGEBRAIC OPERATIONS ON THE INTUITIONISTIC FUZZY LOGİC AND SETS
(M.Sc. THESIS)

ERKAN EKER

ABSTRACT

This thesis consists of three sections. The first section is devoted to introduction. In the second part, the concepts presented in this study are examined through historical development, technical approach and comparisons. In this section, basic definitions and concepts are given by using basic set concepts, propositions and theorems in classical logic, fuzzy logic and intuitionistic fuzzy logic areas. In the third sections, new theorems in intuitionistic fuzzy logic and their proofs are given.In particular, new equations using the ◊ and □ modal operators in intuitionistic fuzzy logic have been obtained.

Key words: Intuitionistic fuzzy logic and sets, Fuzzy logic and sets, Classical logic and sets

Kahramanmaraş Sütçü İmam University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics, February / 2016

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL
Number of Pages: 47

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince engin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve çalışmamın her aşamasında sağladığı bilimsel katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Mehmet Çitil'e, teşekkür ederim.

Son olarak, bu günlere gelmemde her türlü maddi ve manevi desteklerini gördüğüm aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ v
ŞEKİLLER DİZİNİ vi
ÇİZELGELER DİZİNİ vii
1. GİRİŞ 1
2. TARİHSEL GELİŞİM VE KAVRAMLAR 2
2.1. Klasik mantık 2
2.1.1. Klasik mantığın tarihsel gelişimi 2
2.1.2. Klasik mantığın kavramları 3
2.1.3. Kümeler 14
2.2. Bulanık mantık 17
2.2.1. Bulanık mantığın tarihsel gelişimi 17
2.2.2. Bulanık mantığın kavramları 20
2.3.Sezgisel bulanık mantık 25
2.3.1. Sezgisel bulanık mantığın tarihsel gelişimi 25
2.3.2. Sezgisel bulanık mantığın kavramları 25
3. SEZGİSEL BULANIK KÜMEDE UYGULAMALAR 41
KAYNAKLAR 45
ÖZGEÇMİŞ 47

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mu_A(x)$: A sezgisel bulanık kümede x in üye olma derecesi

$\nu_A(x)$: A sezgisel bulanık kümede x in üye olmama derecesi

$\pi_A(x)$: x in A kümesindeki hassasiyet(sezgi) derecesi denir.

□ : Sezgisel bulanık kümelerin modal operatörü

◊ : Sezgisel bulanık kümelerin modal operatörü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 2.1. p ifadesinin gösterimi 27

Şekil 2.2. Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim..... 27

Şekil 2.3. Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim..... 35

Şekil 2.4. Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim..... 35

Şekil 2.5. Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim..... 36

Şekil 2.6. Örnek 2.3.1 in geometrik gösterimi..... 37

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa No

Çizelge 2.1. p ile q önermesinin doğruluk değerleri 4

Çizelge 2.2. p ile $\neg p$ nin doğruluk değerleri 4

Çizelge 2.3. $p \wedge q$ önermesinin alabileceği doğruluk değerleri 5

Çizelge 2.4. $p \vee q$ ile $p \vee q$ önermelerinin doğruluk değerleri 5

Çizelge 2.5. $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değerleri 6

Çizelge 2.6. $p \Leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesinin alabileceği doğruluk değerleri 6

Çizelge 2.7. $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ operatörlerin öncelikleri 7

Çizelge 2.8. $(p \wedge q) \vee \neg (p \wedge q)$ önermesinin doğruluk değerleri 7

Çizelge 2.9. $(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)$ önermesinin doğruluk değerleri 8

Çizelge 2.10. $p \vee q$ ve $q \vee p$ nin doğruluk değerleri 8

Çizelge 2.11. Mantıksal çıkarım kuralları 11

Çizelge 2.12. Evrensel niceliğin doğru ya da yanlış olduğu durum 12

Çizelge 2.13. Niceleyiciler için De Morgan kuralları 12

Çizelge 2.14. İki değişkenin nicelendirilmesi 13

Çizelge 2.15. Nicelendirilmiş kümeler için çıkarım kuralları 13

Çizelge 2.16. Başlıca küme özdeşlikleri 16

Çizelge 2.17. J.Lukasiewicz 'in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri 17

Çizelge 2.18. Heyting'in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri ... 18

Çizelge 2.19. Bulanık küme türleri 20

Çizelge 2.20. Zadeh'in geliştirdiği standart bulanık küme işlemleri 23

Çizelge 2.21. Bazı iyi bilinen t-norm ve t-conormlar 25

Çizelge 2.22. Sezgisel bulanık işlemcileri listesi 28

Çizelge 2.23. Totolojik tipteki önermeler 32

Çizelge 2.24. Totolojik tipteki önermeler..... 32

1. GİRİŞ

Sezgisel bulanık mantık (Intuitionistic Fuzzy Logic) K.Atanassov tarafından 1984 yılında tanımlanmıştır. Sezgisel bulanık mantık, bulanık mantığın bir genellemesidir. Sezgisel bulanık mantık teorisi, klasik küme teorisi ve bulanık mantık teorisinin tam cevap veremediği ve yetersiz kaldığı bazı durumlar için çözüm üretebilmiştir. Bu arada klasik mantık, bulanık mantık ve sezgisel bulanık mantık teorilerinin hepsi, kümeler teorisi ile iç içedir. Sezgisel bulanık mantık, bulanık mantık ve klasik mantık ifadeleri ile sezgisel bulanık küme, bulanık küme ve klasik küme ifadeleri bir bütünlük içerir ve bunları beraber düşünmek gerekir. Bu yüzden çalışmamız bizlere bu bütünlükten yaralanarak daha detaylı bir karşılaştırma yapma fırsatı verecektir. Klasik küme teorisinde her önermenin doğruluk değerini verebiliriz. Doğru önerme 1 şeklinde, yanlış önerme 0 şeklinde ile ifade edilir. Örneğin 5 sayısı rakamlar kümesine ait ise 1 ile gösterilir ama 12 sayısı bu kümeye ait olmadığı için 0 ile gösterilir. Bulanık mantık teorisinde ise Zadeh, hayatın her alanında kesinlik olmadığını, gündelik yaşamda kesinlikten daha çok aitlik kavramının geçerli olduğunu, bu yüzden aitlik kavramının $[0,1]$ aralığında olduğunu değerlendirir. Örneğin boyu 1.80m olan bir kişi uzundur ama 1.79m olan bir kişiye kısa diyemeyiz. 1.80m olan kişinin uzun boylu insanlar kümesine ait olma derecesi daha büyüktür. Sezgisel bulanık mantıkta ise bulanık mantığa ek olarak bir değer daha eklenmiştir o da ‘‘hassasiyet(sezgi) derecesi’’ olarak ta isimlendirilen π’dir. Bu yeni değer [0,1] arasındadır.

Bu çalışmada klasik mantık, bulanık mantık ve sezgisel bulanık mantıkta temel küme kavramları, önermeler ve ispatlar verilecektir. Özellikle sezgisel bulanık mantık, bulanık mantıktan sonra inşa edildiğinden bu alanda uygulama ve çalışmalar yeni başlamıştır. Şimdiye kadar bu tür karşılaştırmalı bir çalışma yapılmamıştır. Bu nedenle çalışmamız daha çok derleme olup eksik kısımları tamamlayarak uygulama örnek ve ispatlar yapıp bu alandaki çalışmalara bir katkı sağlamaktır.

İkinci bölümde çalışmada yer alan kavramlar, tarihsel gelişim, teorik yaklaşım ve karşılaştırmalar yapılıp anlatılacaktır. Klasik mantık, bulanık mantık ve sezgisel bulanık mantıktaki temel küme kavramları ve önermeler kullanılarak temel tanım teoremleri verilecektir. Üçüncü bölümde ise sezgisel bulanık mantık ile ilgili yeni teoremler ve ispatlar verilmiştir. Özellikle sezgisel bulanık mantıktaki $\Diamond$ ve $\Box$ modal operatörleri kullanılarak yeni eşitlikler bulunmuştur. Bulunan yeni eşitlikler, Mersin Üniversitesinde

14-18 Ekim 2015'te yapılan ''2. International Intuitionistic Fuzzy Sets Conference'' ta dinleyicilere sunulmuştur.

2. TARİHSEL GELİŞİM VE KAVRAMLAR

2.1. Klasik mantık

2.1.1. Klasik mantığın tarihsel gelişimi

Mantık kelimesi, Yunanca logike kelimesinin Arapça tercümesidir. Mantık, doğru ve düzgün düşünme formatını inceleyen bilim dalıdır.[1]

Aynı zamanda sözlük anlamı ''Gerçeği ararken yapılan zihin işlemlerinden hangilerinin doğru, hangilerinin yanlış yola çıktığını gösteren bilim''dir. Kısaca mantık, doğru düşünme kuralları bilgisidir. Sembolik mantıkta, bir konuyu incelerken kullanılan dil yardımıyla karışık kavramları öğrenmek ve matematik konularını daha kesin bir anlatımla vermek kolaylaşacaktır.[2]

Mantığı ilk defa sistematik olarak ele alıp kuran Aristoteles'tir (384 M.Ö.- 322 M.Ö.). Aristoteles fikirlerini daha önceki dönemlerde yaşamış olan Yunanlı filozof Pisagor (Pythagoras) ve onu izleyen kişilerin çalışmalarından almıştır.[1]

Aristoteles, Pisagor (Pythagoras) un düşüncelerini insanlara, gerçeklerin araştırılması ile matematiğin hassaslığını birleştirerek düşünme ve karar verme yoluyla yaymıştır. M.S. onuncu yüzyılda Aristoteles mantığı, Avrupa ve orta doğu düşüncelerinin temeli olmuştur. Bunun iki nedeni vardır: Problemler üzerinde düşünmeyi basitleştirir ve ''kesinliği'' (veya ''gerçekliği'') kanıtlamayı veya kabul etmeyi kolaylaştırır.[1]

Aristoteles'in Orta Çağ Avrupa düşüncesine hâkimiyeti fizik, metafizik ve mantıkta Rönesans'a kadar devam etti. Klasik mantığın orta çağ bilimleri için yetersizliği ortaya çıktı. Klasik mantığın esasını oluşturan kıyas, tümdengelimin en mükemmel şeklidir. Kıyaslar dilsel formda değil aksine düşünsel formdadır. Bacon ve Descartes kıyasa karşı çıktılar ve yetersizliğini göstererek yeni metotlar aradılar. Bacon(1561-1626) tümdengelime karşı çıkarak tümevarım metodunu esas aldı. Aristoteles'in mantığında kanıtlama yöntemi olarak kullanılan kıyasların aslında yeni bir bilgi vermediği, yalnızca öncüllerde gizli olanın sonuçta tekrarından ibaret olduğu Descartes (1596-1650) tarafından ortaya kondu. Klasik mantığın konusunu teşkil eden kavram, önerme ve kıyas üzerinde Yeni Çağ'da Aristoteles'ten farklı bazı yeni görüşler öne sürülmüş ise de bu yeni fikirler

Aristo mantığında köklü değişiklikler yapmadı ve on dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında sembolik mantık çalışmaları başladı.[1]

Mantığın sembolleştirilmesi Raymond Lulle (1235-1315)'e kadar uzanır. Lulle, mantığı mekanik bir sanat olarak görüyordu. Lulle'nin takipçisi sayılabilecek Leibniz (1646-1716) mantığın sembolleştirilmesi konusunu bir adım ileri taşımıştır. Leibniz yeni bir sembol sistemi icat etmiştir ve bu sisteme '' characteristica universalis '' adını vermiştir. Leibniz denemeleri ile modern mantığın öncüsü sayılır. Sembolik mantık üzerine asıl çalışmalar 19. asrın ikinci yarısında yapılmıştır. Özellikle geliştirme aşamasında De Morgan (1806-1876) , Boole (1815-1864) , Jevos (1835-1882)'un katkıları oldukça çoktur. Klasik mantıkta matematiğin istenilen ilerlemeyi sağlaması için yeni fikirler ortaya atan, ilerlemesine etki eden bilim adamları Frege (1848-1925) , Peano (1858-1932) , Bertrand Russell (1872-1970) ve Alfred North Whitehead (1861-1947) dır. Özellikle Russell ve Alfred North Whitehead modern mantığın kurucuları olarak adlandırılır. [1]

2.1.2. Klasik mantığın kavramları

Tanım 2.1.1 Bir önerme ya doğru ya da yanlış olan, fakat hem doğru hem yanlış olmayan bir açıklayıcı cümledir yani bir bilineni açıklayan bir cümledir.[3]

Önermeler genellikle p,q,r,s gibi alfabedeki küçük harflerle gösterilir. Önermenin sahip olduğu hüküm değerine doğruluk değeri adı verilir. Önerme doğru ise ''D'' , yanlış ise ''Y'' ile gösterilir. Bazen doğru yerine '' 1'', yanlış yerine '' 0'' da yazılabilir.

Örnek 2.1.1

p: '' 97 İki basamaklı en büyük asal sayıdır. ''

q : '' $x^2 + x + 1 = 0$, denkleminin reel kökü vardır. ''

Yukarıda verilen ifadeler birer önermedir. p önermesinin doğruluk değeri 1 iken q önermesinin doğruluk değeri 0'dır.

Aşağıdaki çizelge 2.1 de p ile q nun alabileceği doğruluk değerleri verilmiştir.

Çizelge 2.1. p ile q önermesinin doğruluk değerleri

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Genel olarak birbirinden farklı n tane önerme verildiğinde doğruluk değerleri bakımından bunlar arasında birbirlerine göre 2^n farklı durum vardır.[2]

p: ‘‘ 97 İki basamaklı en büyük asal sayıdır.’’ Önermesi daha basit biçimlere ayrılamadığından basit önermedir.

Önermeler ya doğrudur ya da yanlıştır. Aşağıdaki örnekte verilenler ifadeler önerme değildir.

Örnek 2.1.2 ‘‘ İş çıkışı yemek yemeye gidelim mi?’’

‘‘ Zile basma! ’’

Soru, öneri veya emir içeren ifadeler birer önerme değildir. [4]

Tanım 2.1.2 Bazı önermelerin birleştirilmesi ile elde edilen bir önermeye bileşik önerme denir.[5]

Tanım 2.1.3 p bir önerme olsun. p nin değil’i , $\neg p$ (aynı zamanda $\sim$p , $\bar{p}$) olarak gösterilen cümle aşağıdaki şekildedir.

‘‘ p nin doğru olmadığı durum’’

$\neg p$ önermesi ‘‘ değil p ’’ olarak okunur. p’nin değil’i $\neg p$ nin doğruluk değeri, p nin doğruluk değerininin tersidir. Biz bu tezde $\neg p$ gösterimini kullanacağız. Çizelge 2.2 de p ile $\neg p$ doğruluk değerleri gösterilmiştir.[3]

Çizelge 2.2. p ile $\neg p$ nin doğruluk değerleri

p	$\neg p$
1	0
0	1

Tanım 2.1.4 p ve q iki önerme olsun p ve q'nun $p \wedge q$ şeklinde gösterilen birleştirme operatörü '' p ve q" önermesi olarak tanımlanır. $p \wedge q$ birleştirme sonucu p ve q'nun her ikisi de doğru olduğunda doğru, diğer durumlarda yanlıştır. Çizelge 2.3 de $p \wedge q$ şeklinde gösterilen birleştirme operatörünün alabileceği değerler gösterilmiştir. [3]

Çizelge 2.3. $p \wedge q$ önermesinin alabileceği doğruluk değerleri

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tanım 2.1.5 p ve q iki önerme olsun. p ve q 'nun $p \vee q$ şeklinde gösterilen ayırma operatörü '' p veya q'' önermesi olarak tanımlanır. $p \vee q$ ayırma sonucu p ve q nun her ikisi de yanlış olduğunda yanlış, diğer durumlarda doğrudur.[3]

Tanım 2.1.6 p ve q iki önerme olsun. Dışlamalı veya $p \underline{\vee} q$ şeklinde gösterilir ve ''p veya q" şeklinde okunur. Burada veya kelimesi '' dahil edici anlamında " kullanılmaktadır. p veya q'dan biri doğru iken ya da ikisi birden doğru iken $p \vee q$ doğrudur ama '' $p \underline{\vee} q$" bileşik önermesi p veya q dan yalnızca biri doğru iken $p \underline{\vee} q$ doğrudur, yani biri ya da diğeri doğrudur, her ikisi birden doğru değildir. Çizelge 2.4 de $p \vee q$ ile $p \underline{\vee} q$ önermelerinin doğruluk değerleri gösterilmiştir. [4]

Çizelge 2.4. $p \vee q$ ile $p \underline{\vee} q$ önermelerinin doğruluk değerleri

p	q	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Tanım 2.1.7 p ve q iki adet önerme olsun. $p \Rightarrow q$ şartlı ifadesi "eğer p ise, bu durumda q" olarak tanımlanmıştır. $p \Rightarrow q$ şartlı ifadesi p doğru, q yanlış olduğunda yanlış, diğer durumların hepsinde doğrudur. $p \Rightarrow q$ şartlı ifadesinde p'ye hipotez (veya öncül), q ya da sonuç (veya hüküm) denir. $p \Rightarrow q$ ifadesi şartlı bir ifadedir, çünkü $p \Rightarrow q$, q'nun

doğruluğunun p'nin doğru olması durumuna bağlı olduğunu açıklamaktadır. Bir şartlı ifade aynı zamanda "gerektirme" olarak da adlandırılır. Çizelge 2.5 de $p \Rightarrow q$ önermesinin alabileceği doğruluk değerleri gösterilmiştir.[3]

Çizelge 2.5. $p \Rightarrow q$ önermesisin doğruluk değerleri

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1

Tanım 2.1.8 p ve q iki adet önerme olsun. $p \Leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesi '' p sadece ve sadece q ise" olarak tanımlanmıştır. $p \Leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesi p ve q aynı doğruluk değerini aldıklarında doğru, diğer durumlarda yanlıştır. Çift şartlı ifadelere ayrıca çift gerektirmeler de denir. Çizelge 2.6 de $p \Leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesinin alabileceği doğruluk değerleri gösterilmiştir.[3]

Çizelge 2.6. $p \Leftrightarrow q$ çift şartlı ifadesinin alabileceği doğruluk değerleri

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Not 2.1.1 Mantıksal operatörlerin önceliği Çizelge 2.7 de verilmiştir.

Çizelge 2.7. ¬,∧,∨,⇒,⇔ operatörlerin öncelikleri

Operatör	Öncelik
¬	1
∧	2
∨	3
⇒	4
⇔	5

Tanım 2.1.9 İki ya da daha çok önerme ‘‘ ve’’ , ‘‘veya’’ , ‘‘ ise’’ ve ‘‘ ise ve yalnız böyle ise ’’ bağlaçlarından en az biri ile birbirine bağlanarak yeni önermeler tanımlanabilir. Bu önermelere bileşik önerme denir. [2]

Tanım 2.1.10 Kendisini oluşturan önermelerin doğruluk değerleri ne olursa olsun her zaman doğru olan bileşik önermeye ‘‘her zaman doğru’’ veya ‘‘totoloji’’ denir. Sonucu her zaman yanlış olan bileşik önermeye çelişki denir. Ne bir totoloji ne de bir çelişki olmayan bir bileşik önerme belirsiz (Contingency) olarak adlandırılır. [3]

Tanım 2.1.11 p ve q , $p \Leftrightarrow q$ totoloji olduğu durumda mantıksal denk olarak adlandırılır. $p \equiv q$ veya $p \Leftrightarrow q$ gösterimleri ile gösterilir. Burada ‘‘ ≡ ‘‘ sembolü bir mantıksal bağlaç değildir. $p \equiv q$ bir bileşik önerme değildir, daha ziyade $p \Leftrightarrow q$ ’nin totoloji olduğunu gösteren bir ifadedir. [3]

Örnek 2.1.3 Şimdi sırasıyla totoloji(Çizelge 2.8), çelişki(Çizelge 2.9)ve mantıksal denklik (Çizelge 2.10) ile örnek verelim.

Çizelge 2.8. $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \neg (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Çizelge 2.9. $(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)$ önermesinin doğruluk değerleri

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$q \Rightarrow \neg p$	$(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \neg p)$
1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Çizelge 2.10. $\boldsymbol{p \vee q}$ ve $\boldsymbol{q \vee p}$ nin doğruluk değerleri

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Burada $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ dir.

Tanım 2.1.12 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gibi sonlu bir önermeler dizisinde her bir önerme bir belit, bir tanım veya doğruluk değeri kendisinden önce gelen önermelerin doğruluk değerlerinden elde edilebilen bir önerme ise , bu diziye ispat adı verilir. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ önermelerinin her birine ispatın bir adımı denir.Bir ispatta en son adım olan p_n, bir teorem, lemma veya sonuçtur.[5]

Aşağıdaki teoremlerde belirtilen temel özelliklere önermeler cebiri kuralları da denir.

Teorem 2.1.1 p, q ve r gibi basit önermeler ve her T totolojisi ve her F çelişkisi için aşağıdaki özellikler vardır.

1)Tek kuvvet özelikleri(Eş güçlülük Kuralları):

i. $p \vee p \Leftrightarrow p$

ii. $p \wedge p \Leftrightarrow p$

2) Değişme özelikleri:

i. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

ii. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

iii. $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow q \underline{\vee} p$

iv. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

3) Birleşme özelikleri:

i. $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

ii. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

iii. $(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$

iv. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \Leftrightarrow p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

4) Dağılma özelikleri:

i. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

ii. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

iii. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

iv. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

5) Özdeşlik özelikleri:

i. $p \vee F \Leftrightarrow p$ ve $p \vee T \Leftrightarrow T$

ii. $p \wedge F \Leftrightarrow F$ ve $p \wedge T \Leftrightarrow p$

6) Tamlama özelikleri(Ters olma Özelliği):

i. $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$

ii. $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$

7) Çifte Değilleme (İnvolusyon) özelliği:

i. $\neg \neg p \Leftrightarrow p$

8) De Morgan özelikleri:

i. $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

ii. $\neg (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

9) Baskın Olma özelliği:

i. $p \vee T \Leftrightarrow T$

ii. $p \wedge F \Leftrightarrow F$

10) Özümseme özelliği:

i. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

ii. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

11)

i. $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

12)

i. $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

13)

i. $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)$

Teorem 2.1.2(Tümdengelim ilkesi) p,q ve r herhangi üç önerme olduğuna göre $(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumlarda $p \Rightarrow q$ bileşik önermesi de doğrudur.

Örnek 2.1.4 Şartlı cümleleri kapsayan bazı mantıksal denklikler aşağıda verilmiştir.[3]

1. $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
2. $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$
3. $p \vee q \equiv \neg p \Rightarrow q$
4. $p \wedge q \equiv \neg (p \Rightarrow \neg q)$
5. $\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
6. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$
7. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$
8. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \vee r)$
9. $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

Örnek 2.1.5 Çift Şartlı cümleleri kapsayan bazı mantıksal denklikler aşağıda verilmiştir.[3]

1. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
2. $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$
3. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
4. $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q$

Not 2.1.2 De Morgan yasaları aşağıdaki şekilde genişletilebilir.[3]

1. $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n)$
2. $\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n)$

veya

1. $\neg(\bigvee_{j=1}^{n} p_j) \equiv \bigwedge_{j=1}^{n} \neg p_j$
2. $\neg(\bigwedge_{j=1}^{n} \neg p_j) \equiv \bigvee_{j=1}^{n} \neg p_j$

Tanım 2.1.13 Eğer p ve q önermeler olmak üzere $p \Rightarrow q$ bir totoloji, yani p doğru iken q da doğru ise o zaman p, q önermesini mantıksal olarak gerektirir denir ve $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilir.[4]

Tanım 2.1.14 Mantık kurallarının uygulanmasıyla belitlerden ve doğruluğu bilinen önermelerden yeni bir önerme üretme sürecine çıkarım veya dedüksiyon denir.[6]

Şimdi çıkarım kurallarını Çizelge 2.11 de gösterelim.[3]

Çizelge 2.11. Mantıksal çıkarım kuralları

Çıkarım	Totoloji	İsim
$\frac{p}{\frac{p \Rightarrow q}{\therefore q}}$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	Modus Ponens(Olumlu Sonuç Çıkarma)
$\frac{\neg q}{\frac{p \Rightarrow q}{\therefore \neg p}}$	$(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow \neg p$	Modus Tollens(Olumsuz Sonuç Çıkarma)
$\frac{p \Rightarrow q}{\frac{q \Rightarrow r}{\therefore p \Rightarrow r}}$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Varsayıma Dayalı Kıyas
$\frac{p \vee q}{\frac{\neg p}{\therefore q}}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$	Ayırıcı Kıyas
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \Rightarrow (p \vee q)$	Toplama
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	Sadeleştirme
$\frac{p}{\frac{q}{\therefore p \wedge q}}$	$((p) \wedge (q)) \Rightarrow (p \wedge q)$	Birleşme
$\frac{p \vee q}{\frac{\neg p \vee r}{\therefore q \vee r}}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \Rightarrow q \vee r$	Karar

Tanım 2.1.15 Bir önermesel fonksiyonda değişkenlerin değerleri atandığı zaman, çıkan ifade belli bir doğruluk değeri olan bir önerme olur. Ancak bir önermesel fonksiyondan bir önerme oluşturmak için niceleme olarak adlandırılan başka bir önemli yol vardır. Niceleme bir yüklemin bir aralıktaki öğeler üzerinde gerçek olduğu dereceyi ifade eder. Hep, bazı, birçok, hiçbiri ve birkaç kelimeleri niceleyici olarak kullanılmaktadır.[3]

Tanım 2.1.16 Matematiksel ifadelerin birçoğu bir özelliğin belirli bir tanım bölgesindeki bir değişkenin tüm değerleri için geçerli olduğunu iddia eder. Bu tanım bölgesi söylem alanı (veya söylem evreni) olarak adlandırılır, genellikle sadece etki alanı olarak adlandırılır. Böyle bir ifade evrensel niceleme kullanılarak ifade edilir. Belirli bir tanım bölgesi için $P(x)$' in evrensel nicelemesi, bu tanım bölgesindeki bütün x değerleri için $P(x)$ in doğru olduğunu ileri süren önermedir. Aşağıdaki Çizelge 2.12 de evrensel niceliğin kullanımı gösterilmektedir.[3]

Çizelge 2.12. Evrensel niceliğin doğru ya da yanlış olduğu durum

İfade	Doğru Olduğunda	Yanlış Olduğunda
$\forall x P(x)$	$P(x)$ in her bir x için geçerli	$P(x)$ in yanlış olduğu için bir x değeri vardır.
$\exists x P(x)$	$P(x)$ in doğru olduğu bir x vardır.	$P(x)$ her x için yanlıştır.

Tanım 2.1.17 Matematiksel ifadelerin birçoğunun belli bir özelliği olan bir eleman olduğu iddia edilir. Bu tür ifadeler varoluşsal niceleme kullanılarak ifade edilir. Varoluşsal niceleme ile doğru bir önerme oluşturulması için gerek ve yeter şart, tanım bölgesindeki en az bir x elemanı için $P(x)$ in doğru olmasıdır.[3]

Not 2.1.3 $\forall$ ve $\exists$ niceliycileri önermesel analizde bütün diğer mantıksal operatörlerden daha yüksek önceliğe sahiptir.[3]

Tanım 2.1.18 x değişkeni üzerinde bir niceleyici kullanıldığında değişkenin bu oluşumu bağımlıdır denir. Bir niceleyici tarafından bağımlı olmayan veya belirli bir değerin bir cümlesine eşit bir değişkenin oluşumu bağımsızdır denir. Diğer bir ifade ile eğer bir değişken bu değişkeni özelleştiren belirli bir formülde bütün niceleyicilerin kapsamının dışında ise bu değişken bağımsızdır.[3]

Niceleyiciler için De Morgan Kuralları aşağıdaki Çizelge 2.13 de incelenmiştir.[3]

Çizelge 2.13. Niceleyiciler için De Morgan Kuralları

Değil	Eşdeğer ifade	Değili ne zaman doğru?	Ne zaman yanlış?
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Her x için $P(x)$ yanlış.	$P(x)$ doğru olacak şekilde bir x vardır.
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	$P(x)$ yanlış olacak şekilde bir x vardır.	Her x için $P(x)$ doğrudur.

İki değişkenin nicelendirilmesi, aşağıdaki Çizelge 2.14 de incelenmiştir.[3]

Çizelge 2.14. İki değişkenin nicelendirilmesi

Cümle	Ne zaman doğru?	Ne zaman yanlış?
$\forall x \forall y\ P(x,y)$	$P(x,y)$ her x,y çifti için doğru	$P(x,y)$ nin yanlış olduğu bir x,y çifti bulunmaktadır.
$\forall y \exists y\ P(x,y)$	$P(x,y)$ her x,y çifti için doğru	$P(x,y)$ nin yanlış olduğu bir x,y çifti bulunmaktadır.
$\forall x \exists y\ P(x,y)$	Her x için $P(x,y)$ nin doğru olduğu bir y bulunmaktadır	Her y için $P(x,y)$ nin yanlış olduğu bir x bulunmaktadır.
$\exists x \forall y\ P(x,y)$	Her y için $P(x,y)$ nin doğru olduğu bir x bulunmaktadır	Her x için $P(x,y)$ nin yanlış olduğu bir y bulunmaktadır.
$\exists x \exists y\ P(x,y)$	$P(x,y)$ nin doğru olduğu bir x,y çifti bulunmaktadır.	$P(x,y)$ her x,y çifti için yanlış.
$\exists x \exists x\ P(x,y)$	$P(x,y)$ nin doğru olduğu bir x,y çifti bulunmaktadır	$P(x,y)$ her x,y çifti için yanlış.

Nicelendirilmiş cümleler için çıkarım kuralları, Çizelge 2.15 de incelenmiştir.[3]

Çizelge 2.15. Nicelendirilmiş cümleler için çıkarım kuralları

Çıkarım Kuralı	İsim
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	Evrensel özelleme
$\dfrac{P(c)\text{keyfi bir c için}}{\therefore \forall x P(x)}$	Evrensel genelleştirme
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c)\text{bazı c elemanı için}}$	Varoluşsal özelleme
$\dfrac{\therefore P(c)\text{bazı c elemanı için}}{\therefore \exists x P(x)}$	Varoluşsal genelleştirme

Bu arada "$\therefore$'' sembolü bundan dolayı anlamına gelmektedir.

2.1.3. Kümeler

Bu kısımda mantık konusu ile bir bütünlük içeren kümeler teorisinin temel tanım ve kavramlarını vereceğiz.

Modern matematiğin en önemli kullanım araçlarından birisi kümeler teorisidir. Kümeler teorisinin kurucusu olarak da kabul edilen G.Cantor (1845-1918) ile B.Russel (1872-1970) , J.Veen (1834-1923) , R.Descartes (1596-1650) , Frege (1848-1925) , G.Peano (1858-1932) gibi birçok matematikçi kümeler kuramının gelişimine katkıda bulunmuştur.

Küme kavramı ilk defa G.Cantor (1845-1918) tarafından sonsuz büyükleri tanımlamak ve karşılaştırabilmek amacıyla ortaya atılmıştır. Daha sonra kümeler teorisinde ortaya çıkan paradokslar Contor'un fikirlerini formüle etme gerekliliğinin olduğunu göstermiştir. Zermelo muhtemelen kümeler teorisi için bir aksiyomatik yaklaşım geliştiren ilk kişidir. Fraenkel, Zermelo'nun aksiyomlarının uyarlamalarını yapmıştır. Bu teori Zermelo- Fraenkel (ZF)Aksiyomatik Kümeler Teorisi olarak bilinir ve hâlâ kullanımdadır. Ayrıca bazı Matematikçiler tarafından (von Neumann, Bernays, Gödel gibi) benzer yaklaşımlar gerçekleştirilmiştir. [4]

Tanım 2.1.19 Bir küme sıralı olamayan nesneler topluluğudur. Bir kümenin içindeki nesnelere kümenin elemanları veya üyeleri denir. Bir küme, elemanlarını içerir. $a \in A$ yazarak a'nın A kümesinin bir elemanı olduğunu belirtiriz. $a \notin A$ gösterimi ise a'nın A kümesinin bir elemanı olmadığını belirtir. [3]

Kümeler genelde büyük harfler ile elemanları veya üyeleri ise küçük harfler ile gösterilirler.

Tanım 2.1.20 Küme aşağıdaki şekillerde de tanımlanabilir. [6]

1.Sezgisel anlamda, belirli nesnelerden oluşan topluluk.

2.Zermelo-Fraenkel-Skolem türünden aksiyomatik sistemlerde temel tanımsız kavram.

3.Neumann-Bernays-Gödel türünden aksiyomatik sistemlerde bir sınıfa ait sınıf.

Tanım 2.1.21 Belirli bir incelemede söz konusu olan bütün elemanların kümesine evrensel küme denir.[6]

Tanım 2.1.22 Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir. $\emptyset$ veya $\{\}$ işareti ile gösterilir. [3]

Tanım 2.1.23 Bir A kümesi, sadece ve sadece A'nın tüm elemanları aynı zamanda B'nin elemanı ise B kümesinin alt kümesidir. $A \subseteq B$ gösterilir.[3]

Tanım 2.1.24 E bir evrensel küme olsun. $A, B \subseteq E$ olmak üzere, $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise o zaman A ve B kümeleri eşittir denir ve $A = B$ olarak gösterilir. [4]

Tanım 2.1.25 $n \geq 2$ tamsayısı için $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{E}$ boş kümeden farklı kümeleri verilmiş olsun. $1 \leq i \leq n$ için $a_i \in A_i$ olmak üzere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ gösterimine sıralı n-li denir. [4]

Tanım 2.1.26 $n \geq 2$ tamsayısı için $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \mathcal{E}$ kümeler olsun.

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : i = 1,2, \ldots, n \; için \; a_i \in A_i\}$$

kümesine $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin Kartezyen çarpımı denir. [4]

Tanım 2.1.27 A ve B kümeler olsun. A ve B kümelerinin birleşimi, $A \cup B$ olarak gösterilir veya A kümesinde ya da B kümesinde olan veya her iki kümeye ait olan elemanlardan oluşur.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.[7]

Tanım 2.1.28 A ve B kümeler olsun. A ve B kümelerinin kesişimi, $A \cap B$ olarak gösterilir ve A ve B kümelerinin her ikisinde birden olan elemanları içerir.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Tanım 2.1.29 İki kümenin kesişimi boş küme ise bu iki küme ayrık kümedir.

Tanım 2.1.30 E bir evrensel küme olsun. $A \subseteq E$ olmak üzere;

$$\{x : x \in E \wedge x \notin A\}$$

kümesine A nın E ye göre tümleyeni veya A'nın mutlak tümleyeni denir ve $E - A$, $E \backslash A$ veya $\overline{A}$ olarak gösterilir. Diğer bir ifade ile

$$\overline{A} = \{ x : x \in E \wedge x \notin A \}$$

gösterilir.

Tanım 2.1.31 A ve B kümeler olsun. A fark B kümesi , $A - B$ olarak gösterilir, A'nın içinde olup B'nin içinde olmayan elemanlardan oluşan kümedir. A fark B aynı zamanda B'nin A ya göre tümleyeni olarak adlandırılır.

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

dir.[3]

Not 2.1.4 Küme özdeşlikleri ve önerme denklikleri Boole cebiri için var olan özdeşliklerin özel durumlarıdır.

Başlıca küme özdeşlikleri aşağıda Çizelge 2.16 da gösterilmiştir.[3]

Çizelge 2.16. Başlıca küme özdeşlikleri

$A, B, C \subseteq E$ olmak üzere;	
Özdeşlik	İsim
$A \cap E = A$ $A \cup \emptyset = A$	Özdeşlik kanunları
$A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Baskınlık kanunları
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Değişmezlik Kanunları
$\overline{(\overline{A})} = A$	Katlı Olumsuzluk Kanunu
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Sıra Değişme Kanunları
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Birleşme Kanunları
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ A∩(B∪C)= (A∩B)∪(A∩C)	Dağılma Kanunları
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's Kanunları
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Yutma Kuralı
$A \cup \overline{A} = E$ $A \cap \overline{A} = E$	Tümleyen Kuralı

Tanım 2.1.32 Bir kümeler topluluğunun birleşim kümesi, koleksiyondaki kümelerden en az bir tanesinin elemanı olan unsurları içerir.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ kümelerinin birleşimini göstermek için şu gösterimi kullanırız:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Tanım 2.1.33 Bir kümeler koleksiyonunun kesişim kümesi, topluluktaki kümelerden hepsinin birden elemanı olan unsurları içerir.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ kümelerinin kesişimini göstermek için şu gösterimi kullanırız:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

2.2. Bulanık mantık

2.2.1. Bulanık mantığın tarihsel gelişimi

Aristoteles ile sistematikleşen klasik mantık kavramı doğru ya da yanlışlar üzerine kurulmuştur. İki değerli mantıkta düşünce, akıl yürütme ve çıkarım yapma söz konusu olmaktadır. Özellikle çelişmezlik ve üçünün olmazlığı ilkeleri iki değer üzerinde yoğunlaşmaktadır. Fakat bazı önermeler vardır ki ne doğru ne de yanlıştır. İşte iki değerli mantığın dışında çok değerli mantıkların olabileceğini ve bunu oluşturan temel düşüncenin de Platon , “ Doğru ” ve “ Yanlışın ” iç içe girdiği üçüncü bir durumu belirterek iki değerli mantığın dışında bulanık mantığın da temellerini atmış oldu.

Aynı zamanda ikiden fazla değeri kabul eden mantıklara çok değerli mantık adı verilmektedir. [8]

Bulanık mantığa doğru uzanan bu süreçte çok değerli mantık konusunda araştırma yapan ve 1917 yılında iki değerli mantığa üçüncü bir değer eklemesi yapan J.Lukasiewicz ‘‘ Doğru ’’ , ‘‘ Yanlış ’’ ve ‘‘ Belirsiz ’’doğruluk tanımlarını yapmıştır. Bu yaklaşıma göre Belirsizlik hali ‘‘ $\frac{1}{2}$ ’’ ile gösterilmektedir. Üç değerli mantıkta klasik mantığın kapsamı içerisinde bulunan ve önermeler mantığında kullanılan tüm mantıksal değişmezler aynen kabul edilmektedir. Mantıksal değişmezlerin doğruluk tanımlarında bazı değişiklikler olmaktadır. [8]

Aşağıdaki tabloda J.Lukasiewicz ’in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri Çizelge 2.17 gösterilmektedir.[8]

Çizelge 2.17. J.Lukasiewicz ’in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	0	1	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1	0	0	1	1

J.Lukasiewicz'in üç değerli mantığını genişleten A.Heyting sezgisel mantığın da kurucusudur. Heyting J.Lukasiewicz'den farklı olarak değilleme , koşul bağlacı ve bu ifadeler ile oluşturulan bileşik önermeleri farklı yorumlamıştır. Bu durumlar dışında Heyting'in üç değerli mantığı J.Lukasiewicz'in üç değerli mantığı ile aynı kuralları kullanmaktadır. Heyting mantığında değil önermesi $p = 1$ve $p = \frac{1}{2}$ için 0 doğruluk değerine $p = 0$ için ise 1 doğruluk değerine sahiptir. Koşul önermesinde ise $T(p) \leq T(q)$ olduğunda bileşik önermenin doğruluk değeri 1 ve $T(p) > T(q)$ olduğunda ise $T(p \Rightarrow q) = T(q)$ olarak belirlenmektedir .[8]

Aşağıdaki tabloda Heyting'in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri Çizelge 2.18 gösterilmektedir. [8]

Çizelge 2.18. Heyting'in üç değerli mantığında bileşik önermelerin doğruluk değerleri

p	q	$\overline{p}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	0	0	1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Üç değerli mantığın daha da geliştirilmesiyle bir önermenin üç doğruluk değerinden daha fazla doğruluk değeri alabilmesi söz konusu olmuştur. Verilen $n \geq 3$ koşulunu sağlayan herhengi bir doğal sayı için doğruluk değerleri $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılarla ifade edilmişlerdir. $[0,1]$ aralığı eşit parçalara bölünmektedir ve doğruluk değeri kümesi T_naşağıdaki şekilde oluşturulmaktadır:

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

J.Lukasiewicz'in geliştirdiği $n-$değerli mantığı klasik mantıkta söz konusu olan mantıksal bağlaçlar kullanılarak T_n kümesindeki doğruluk değerleri ile bileşik önermeler oluşturulabilmektedir. [8]

Eğer doğruluk değer kümesi $[0,1]$ aralığındaki rasyonel sayılar yerine tüm gerçek sayılarda tanımlanırsa ($T_\infty = [0,1]$) o zaman çok değerli mantık sonsuz değerli mantık adını alır. İşte bu yüzden çok değerli mantık sistemi, sonsuz değerli mantık olarak adlandırılmaktadır. Bulanık küme teorisi ile sonsuz değerli mantık arasında bir uygunluk bulunmaktadır. [9]

Bu bilgilerin ışığında bulanık mantık ilk kez Azeri asıllı Lotfi A. Zadeh tarafından 1965 yılında "Information and Control'' dergisinde yayımlanan "Bulanık Kümeler" adlı makale ile ortaya konmuştur. Lotfi A. Zadeh söz konusu çalışmasında klasik mantığın iki değerli boolean mantık sisteminin bu düşünceleri açıklamakta yetersiz kaldığından söz etmiştir.[8]

Bulanık mantık geleneksel mantık sisteminden içerik ve detay olarak farklılaşmaktadır. Önemli bazı farklılıklar aşağıda gösterilmektedir: [8]

a. Doğruluk

İki değerli mantıksal sistemlerde doğru ve yanlış olmak üzere iki değer bulunmaktadır. Çok değerli sistemlerde ise bir önermenin doğruluk değeri : "Sonlu bir kümenin", " $[0,1]$ aralığı gibi bir aralığın", Boolean cebirinin bir elemanı olabilmektedir.

b. Yüklemler

İki değerli sistemlerde yüklemler kesinlikle, eşittir gibi kavramlardır. Bulanık mantıkta ise uzun, sert, erken, hızlı, çok daha fazla gibi yüklemler kullanılmaktadır.

c. Yüklem şekillendiriciler

Klasik sistemlerde kullanılan yüklem şekillendirici sadece fark yani değil ifadesidir. Bulanık mantıkta ise çok, az çok, oldukça çok, biraz, aşırı derecede gibi pek çok çeşitli yüklem şekillendirici bulunmaktadır.

d. Niceleyiciler

Klasik mantık sistemlerinde "evrensel" ve "var olan" olmak üzere sadece iki niceleyici bulunmaktadır. Bulanık mantıkta ise söz konusu niceleyicilere ek olarak birkaç, ı3birtakım, genellikle, pek çok, hemen hemen, her zaman, sık sık gibi ifadeler de kabul edilmektedir. Bulanık mantıkta, bir bulanık niceleyici, bulanık bir sayı ile açıklanmaktadır.

Bulanık mantığın kullanımı çok hızlı bir şekilde gelişerek uygulama alanlarına farklı bakış açıları katarak "Matematik", "Mühendislik", "Ekonomi", "Bilgisayar" ve diğer

bilim dallarında yeniliklerin hızlı bir şekilde ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Özellikle sanayi alanındaki etkisi çok fazladır ve yaygın olarak bu alanda kullanılmaktadır.

2.2.2. Bulanık Mantığın Kavramları

Bulanık mantık iki anlamda kullanılmaktadır. Dar anlamda bulanık mantık, klasik iki değerli mantığın genelleştirilmiş halidir. Geniş anlamda ise bulanık kümeleri kullanan bütün teorileri ve teknolojileri ifade eder.[9]

Aynı zamanda dar anlamıyla bulanık mantık, yaklaşık akıl yürütmeyi şekillendirmeyi amaçlayan bir mantıksal sistemdir. Geniş anlamda bulanık mantık, bulanık küme teorisini de kapsar ve dar anlamıyla bulanık mantığı da içerir. Günümüzde bulanık mantık denildiğinde anlaşılan geniş anlamda bulanık mantıktır [10]

Bulanık küme türlerini aşağıdaki Çizelge 2.19 da verilmiştir. [8]

Çizelge 2.19. Bulanık küme türleri

KLASİK KÜME	ÜÇ DEĞERLİ KÜME	BEŞ DEĞERLİ KÜME	YEDİ DEĞERLİ KÜME	SÜREKLİ BULANIK KÜME
1 =Tamamıyla içinde	1 =Tamamıyla içinde	1 =Tamamıyla içinde	1 =tamamıyla içinde	1 =Tamamıyla içinde
		0.75 =Dışında olmaktan çok içinde	0.83 =Çoğunlukla fakat tamamı ile içinde değil	Derecesi çoğunlukla içinde olan aralık $0.5 < x < 1$
			0.67 =az ya da çok içinde	
	0.5 = içinde yada dışında değil (geçiş noktası)	0.5 = içinde yada dışında değil	0.5 = içinde yada dışında değil	0.5 = içinde yada dışında değil
			0.33 =az yada çok dışında	Derecesi çoğunlukla dışında olan aralık $0 < x < 0.5$
		0.25 =içinde olmaktan çok dışında	0.17 =çoğunlukla fakat tamamen dışında değil	
0 = Tamamıyla dışında	0 = Tamamıyla dışında	0 = Tamamıyla dışında	0 = Tamamıyla dışında	0 = Tamamıyla dışında

Bu kısımda bulanık mantıktaki temel tanım ve kavramlar verilecektir

Tanım 2.2.1 X boş olmayan bir küme ve $I = [0,1] \subset R$ olsun.

$\mu_A: X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine X de bir bulanık küme denir. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir.[11]

Bu arada μ_A ya A bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu ve $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \in I$ değerinede x in A ya ait olma derecesi denir. X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ ile gösterilir ve her bir elemanı bir bulanık kümesidir.

Not 2.2.1 Klasik küme teorisinde A bir küme ise üyelik fonksiyonu, $\mu_A: X \to \{0,1\}$ karakteristik fonksiyonu,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

olarak ifade edilir. Bu şekilde üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan kümelere klasik küme denir. [11]

Tanım 2.2.2 X boş olmayan bir küme ve $I = [0,1] \subset R$ kapalı aralığı verilmiş olsun.

X kümesinden $[0,1]$ kapalı aralığı içine bütün fonksiyonların kümesi $F(X)$ olmak üzere, $F(X)$ ailesinin her bir elemanına X de bir bulanık küme denir. [11]

X kümesini karakterize eden

$\mu_X: X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için , $\mu_A(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$$X = \{(x,1) : x \in X\}$$

bulanık kümesi olarak yazılabilir.[11]

$\mu_\emptyset: X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için , $\mu_\emptyset(x) = 0$ olarak tanımlanırsa boş küme

$$\emptyset = \{(x,0) : x \in X\}$$

bulanık kümesi olarak yazılabilir. [11]

Tanım 2.2.3 $\alpha \in [0,1]$ sabit olmak üzere her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \alpha$ olsun. Burada μ_A bulanık kümesine sabit bulanık küme denir.[11]

Tanım 2.2.4 Ave B, $F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için,

$$\mu_C(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

şeklinde tanımlanan X deki C bulanık kümesine A ile B bulanık kümelerinin kesişimi denir. $A \wedge B$ ile gösterilir. [11]

Tanım 2.2.5 A ve B, $F(X)$ olsun. Her $x \in X$ için,

$$\mu_D(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

şeklinde tanımlanan X deki D bulanık kümesine A ile B bulanık kümelerinin birleşimi denir. $A \vee B$ ile gösterilir. [11]

Not 2.2.2 Yukarıda tanımlı olan iki bulanık kümenin kesişim ve birleşim işlemlerinde minimum yerine infimum ve maksimum yerine supremum yazılarak bu işlemler herhangi sayıdaki bulanık kümeler ailesi için genişletilebilir.

Tanım 2.2.6 A ve B, $F(X)$ de iki bulanık küme ve μ_A ile μ_B de sırasıyla A ile B nin üyelik fonksiyonları olsun. Bu durumda Her $x \in X$ için;

(i) $A = B \Leftrightarrow \mu_A = \mu_B$

(ii) $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$

(iii) $A \cup B = C \Leftrightarrow \mu_C(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

(iv) $A \cap B = D \Leftrightarrow \mu_D(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$

(v) $E = \bar{A}\ olmak$ üzere $\mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$

Ayrıca $A = \{A_i : i \in I, A_i \in F(X)\}$ bulanık kümelerinin bir ailesi olmak üzere her $x \in X$ için,

$$\cup_{i\in I} A_i = \{(x, sup_{i\in I}\{\mu_{A_i}(x)\}) : x \in X\}$$

$$\cap_{i\in I} A_i = \{(x, inf_{i\in I}\{\mu_{A_i}(x)\}) : x \in X\}$$

Mantıksal işlemler, bulanık mantığın evrimsel tarihinde önemli tartışmaların odak noktası olmuştur. Aslında " min " ve " max " fonksiyonları mantıksal birleşimi ve kesişimi modellemek için sunulmuştur. Bu fonksiyonlar açık bir şekilde geleneksel Boolean operatörlerini genelleştirmektedir, ancak bu fonksiyonların olası tüm fonksiyonları kapsamadığı hemen fark edilmiştir. Son 30 yıllık dönemde, üçgensel normları (kısaca t-norm) ve üçgensel conormları (kısaca t-conorm) içeren birçok farklı işleç (operatör) sunulmuştur. [12]

Tanım 2.2.7 A ve B , $F(X)$ de iki bulanık küme ve $A \cap B$ bu kümelerin kesişimini göstermek üzere, fonksiyonel olarak k ile gösterildiğinde üyelik derecesinin değeri;

$$k: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = k[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

şeklinde ifade edilmektedir.[8]

a, b, c, [0,1] birim aralığında üyelik değerleri olsun.

Tanım 2.2.8 a,b,c ∈ I olmak üzere bir t – norm aşağıdaki şartları sağlayan $t : I \times I \rightarrow I$ dönüşümüdür:

1. Birim Eleman: 1, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $t(1, a) = a$,

2. Monotonluk: $a \leq b \Rightarrow\ t(a,c) \leq t\ (b,c)$,
3. Değişme Özelliği: $t(a,b) = t(b,a)$,
4. Birleşme Özelliği : $t\ \big(a, t\ (b,c)\big) =\ t\ (t\ (a,b),c)$.

Bu özelliklerden anlaşılacağı üzere *t* – norm monoton azalmayan dönüşümdür ve $T(a,0) =\ 0$ ifadesini sağlar. [12]

Tanım 2.2.9 A ve B , $F(X)$ de iki bulanık küme ve $A \cup B$ bu kümelerin birleşimini göstermek üzere, fonksiyonel olarak u ile gösterildiğinde üyelik derecesi olarak;

$$u\colon [0,1] \times\ [0,1] \rightarrow\ [0,1]$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=u[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

şeklinde ifade edilmektedir. [8]

Tanım 2.2.10 a,b,c ∈ I olmak üzere bir *t* – conorm (diğer bir ifade ile s –norm) aşağıdaki şartları sağlayan $s :\ I\ \times I\ \rightarrow I$ dönüşümüdür:

1. Birim Eleman: 0, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $s(0,a) = a$,
2. Monotonluk: $a \leq b \Rightarrow\ s(a,c) \leq s(b,c)$,
3. Değişme Özelliği: $s(a,b) = s(b,a)$,
4. Birleşme Özelliği : $s\big(a, s\ (b,c)\big) =\ s(s(a,b),c)$. [12]

Tanım 2.2.11 Bir $A \in F(E)$ üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$'tir. $\bar{A}$ tanımlanacak olan üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\bar{A}}(x)=1\text{-}\mu_A(x)\ \forall x \in E$$

dir. [8]

Zadeh'in geliştirdiği standart bulanık küme işlemleri aşağıda Çizelge 2.20 verilmektedir.[8]

Çizelge 2.20. Zadeh'in geliştirdiği standart bulanık küme işlemleri

$A, B, C \subseteq E$
$\mu_1=\mu_A(x)$, $\mu_2=\mu_B(x)$, $\mu_3=\mu_C(x)$
$k_{min}(\mu_1,\mu_2) = Minimum[\mu_1,\mu_2]$, $u_{max}(\mu_1,\mu_2) =\ Maksimum\ [\mu_1,\mu_2]$, $t(\mu_1)=1-\mu_1$
$\bar{\bar{A}} = A$ $1-(1-\mu_1)=\mu_1$
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$ $Maks\ [\mu_1,\mu_2]= Maks\ [\mu_2,\mu_1]$ $Min\ [\mu_1,\mu_2]= Min\ [\mu_2,\mu_1]$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$Maks[Maks\ (\mu_1, \mu_2), \mu_3]= Maks[\mu_1, Maks(\mu_2, \mu_3)]$ $Min[Min\ (\mu_1, \mu_2), \mu_3]= Min[\mu_1, Min\ (\mu_2, \mu_3)]$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup\ (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $Min[\mu_1, Maks(\mu_2, \mu_3)]= Maks[Min(\mu_1, \mu_2), Min(\mu_1, \mu_3)]$ $Maks[\mu_1, Min(\mu_2, \mu_3)]= Min[Maks(\mu_1, \mu_2), Maks(\mu_1, \mu_3)]$
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ $Maks\ (\mu_1, \mu_1)= \mu_1$ $Min\ (\mu_1, \mu_1)= \mu_1$
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap E = A$ $Maks\ (\mu_1, 0)= \mu_1$ $Min\ (\mu_1, 1)= \mu_1$
$A \cup E = E$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $Maks\ (\mu_1, 1)= 1$ $Min\ (\mu_1, 0)= 0$
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ $Maks[\mu_1, Min(\mu_1, \mu_2)]= \mu_1$ $Min[\mu_1, Maks\ (\mu_1, \mu_2)]= \mu_1$
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $1 - Maks(\mu_1, \mu_2) = Min[(1 - \mu_1), (1 - \mu_2)]$ $1 - Min(\mu_1, \mu_2) = Maks[(1 - \mu_1), (1 - \mu_2)]$
$A \cup \overline{A} = E$ $Maks\ [\mu_1, (1 - \mu_1)] \neq 1$ $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ $Min\ [\mu_1, (1 - \mu_1)] \neq 0$

Bazı iyi bilinen t-norm ve t-conormlar aşağıdaki Çizelge 2.21 de verilmiştir.[12]

Çizelge 2.21. Bazı iyi bilinen t-norm ve t-conormlar

İsimler	t-normlar	t-conormlar
Zadeh	$min(x,y)$	$max(x,y)$
Probabilistic	xy	$x+y-xy$
Lukasiewicz	$max(x+y-1,0)$	$min(x+y,1)$
Schweizer $p>0$	$max(0,(x^{-p}+y^{-p}-1)^{\frac{-1}{p}})$	$1-max((1-x)^{-p}+(1-y)^{-p}-1,0)^{\frac{-1}{p}}$
Weber ($\lambda>-1$)	$max(\frac{(x+y-1+\lambda xy)}{1+\lambda},0)$	$min(x+y+(\frac{\lambda}{1-\lambda})xy,1)$

2.3.Sezgisel Bulanık Mantık

2.3.1. Sezgisel Bulanık Mantığın Tarihsel gelişimi

1983 yılında K.Atanassov tarafından bulanık küme teorinin bire bir genelleştirmesi olan " Sezgisel Bulanık küme" teori tanımlanmıştır. Sezgisel Bulanık küme teoride elemanların bir kümeye üye olma derecesi ile üye olmama dereceleri toplamı 1 olmak zorunda değildir ancak birim aralıkta olmak zorundadır.

Sezgisel Bulanık küme kavramı tanımlandıktan sonra bu küme üzerindeki yapılar birçok araştırmacı için merak konusu olmuştur ve halen birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bunun yanı sıra Sezgisel Bulanık kümeler üzerindeki bazı birinci ve ikinci tip model operatörlerin tanımı ise 1999 yılında K.Atanassov tarafından tanımlanmıştır. Sezgisel Bulanık kümeler de tanımlanan bu operatörler modal, topolojik ve level olmak üzere üç grupta toplanmıştır.

2.3.2. Sezgisel Bulanık Mantığın Kavramları

Klasik mantıktaki her önermenin doğruluk değerini verebiliriz: doğru önerme 1 ile yanlış önerme 0 ile ifade edilir. Bulanık mantıkta ise doğruluk değeri [0,1] arasında olup

bir ifadenin doğruluk derecesi olarak isimlendirilebiliriz. Sezgisel bulanık mantıkta ise bulanık mantığa ek olarak bir değer daha eklenmiştir oda “hata derecesi” , “yanlışlık derecesi” ya da “hassasiyet(sezgi) derecesi’’ olarak ta isimlendirilen bu yeni değer [0,1] arasındadır. Böylece $\mu(p)$, $\nu(p)$ reel sayıları kısıtlamayı sağlayacak şekilde p ifadesine atanır. [13]

Not 2.3.1 L=[0,1] ve L^*=$\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 : x_1 + x_2 \leq 1\}$ öyleki
“ $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) : \Leftrightarrow x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \geq y_2$’’ ile bir kafestir.
$(L^*, \leq)$ kafesi bir tam kafestir.
$\forall A \subseteq L^*$ için.

$supA = (sup\{x \in [0,1] : (y \in [0,1]), ((x,y) \in A)\}, inf\{y \in [0,1] : (x \in [0,1]), ((x,y) \in A)\})$
ve

$\dot{I}nfA = (inf\{x \in [0,1] : (y \in [0,1]), ((x,y) \in A)\}, sup\{y \in [0,1] : (x \in [0,1]), ((x,y) \in A)\})$
şeklinde tanımlanır.

Bu atama aşağıdaki şekilde tanımlanan S önermeler kümesi üzerine V değerlendirme fonksiyonunu sağlasın. [13]

$$V(p) = \langle (\mu(p), \nu(p)) \rangle$$

Böylece V fonksiyonu S deki tüm önermeler için doğruluk ve yanlışlık değerlerini verir. [13]

$$V : S \rightarrow [0,1] \times [0,1]$$

Değerlendirme doğrusu olan V’nin mantıksal doğru T’ye,

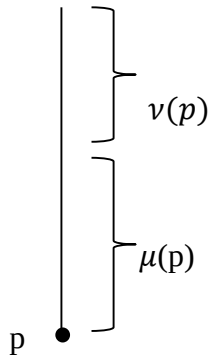
$$V(T) = \langle 1,0 \rangle$$

ve mantıksal yanlış F’ ye

$$V(F) = \langle 0,1 \rangle$$

olarak, değerlerini kabul ederiz. [13]

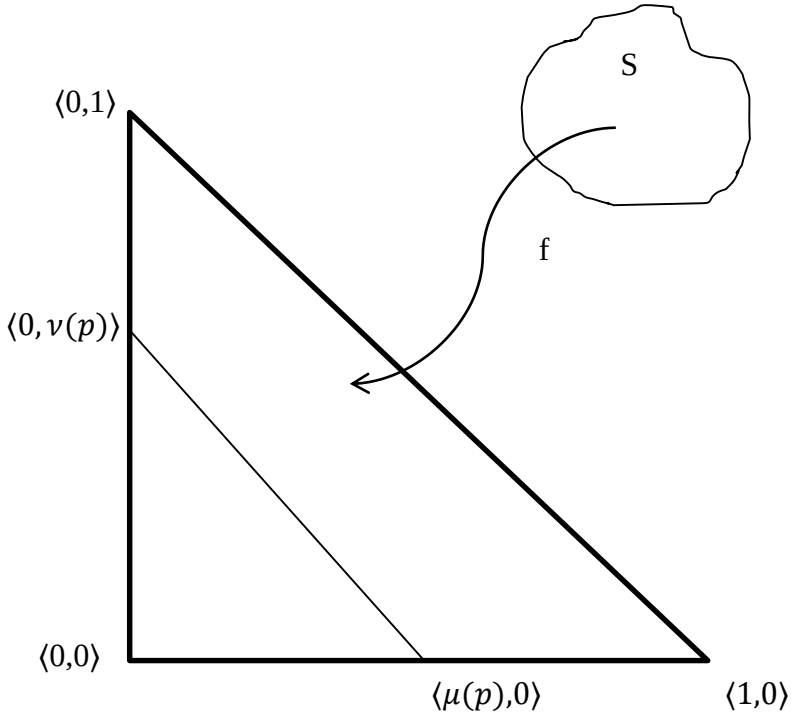
Böylece, her $p \in S$ önermesini formun birim parçası olarak düşünebiliriz. Aşağıda şekil 2.1 de gösterilmiştir.[13]



Şekil 2.1 p ifadesinin gösterimi

$$\mu(p) + \nu(p) \leq 1$$

Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim şekil 2.2 de gösterilmiştir.



Şekil 2.2 Sezgisel bulanık kümelerde geometrik gösterim

p ve q ifadelerinin $V(p)$ ve $V(q)$ değerleri bilindiği zaman V değerlendirme fonksiyonu ‘‘&’’ , ‘‘∨’’ işlemleri ile farklı iki şekilde genişletilebilir. [13]

$$V(p\&_1\, q) = \langle min(\mu(p), \mu(q)), max(\nu\,(p)\; ve\; \nu\,(q))\rangle$$

$$V(p\vee_1 q) = \langle\, max\,(\mu(p), \mu(q)), min(\nu\,(p)\; ve\; \nu\,(q))\rangle$$

$$V(p\&_2 q) = \langle \mu(p).\mu(q), \nu\,(p) + \nu\,(q) - \nu\,(p)\,.\nu\,(q)\rangle$$

$$V(p\vee_2 q) = \langle\, \mu(p) + \mu(q) - \mu(p).\mu(q)\,, \nu\,(p) + \nu\,(q)\rangle$$

Aşağıdaki ifadelerde p ve q değişkenleri için,

$V(p) = (a, b)$, $V(q) = (c, d)$ ve $(a, b, c, d, a + b, c + d \in [0,1])$ olduğunu kabul edelim. Aşağıda bahislerde ihtiyaç duyacağımız için sezgisel bulanık totoloji kavramını tanıyalım p nin bir sezgisel bulanık totoloji (IFT) olması için, gerek ve yeter şart $a \geq b$ olmasıdır.Bununla birlikte p bir totolojidir ve ancak ve ancak $a = 1$ ve $b = 0$ dır. [13]

Bazı tanımlamalarda, aşağıdaki şekilde tanımlanan sg ve $\overline{sg}$ fonksiyonlarını kullanırız.[13]

$$sg(x) = \begin{cases} 1 \text{ , eğer } x > 0 \\ 0 \quad \text{ , eğer } \leq 0 \end{cases}$$

$$\overline{sg}\ (x) = \begin{cases} 0 \text{ , eğer } x > 0 \\ 1 \quad \text{ , eğer } \leq 0 \end{cases}$$

Sezgisel Bulanık işlemcileri listesi Çizelge 2.22 de verilmiştir. [13]

Çizelge 2.22. Sezgisel Bulanık işlemcileri listesi

Notasyon	İsim	işlemciler
$\rightarrow_1$	Zadeh	$\langle max(b, min(a, c)), min(a, d))\rangle$
$\rightarrow_2$	Gaines-Rescher	$\langle 1 - sg(a, c), d.sg(a - c)\rangle$
$\rightarrow_3$	Gödel	$\langle 1 - (1 - c).sg(a - c), d.sg(a - c)\rangle$
$\rightarrow_4$	Kleene-Dienes	$\langle max(b, c), min(a, d)\rangle$
$\rightarrow_5$	Lukasiewicz	$\langle min(1, b + c), max(0, a + d - 1)\rangle$
$\rightarrow_6$	Reichenbach	$\langle b + ac, ad\rangle$
$\rightarrow_7$	Willmott	$\langle min(max(b, c), max(a, b), max(c, d)), max(min(a, d), min(a, b)min($
$\rightarrow_8$	Wu	$\langle 1 - (1 - min(b, c)).sg(a - c), max(a, d), sg(a - c).sg(d - b)\rangle$
$\rightarrow_9$	Klir and Yuan 1	$\langle b + a^2c, ab + a^2d\rangle$
$\rightarrow_{10}$	Klir and Yuan 2	$\langle c.\overline{sg}\ (1 - a) + sg(1 - a).(\overline{sg}\ (1 - c) + b.sg(1 - c)), d.\overline{sg}\ (1 - a) + a.sg(1 - a).sg(1 - c)\rangle$
$\rightarrow_{11}$	Atanassov 1	$\langle 1 - (1 - c).sg(a - c), d.sg(a - c).sg(d - b)\rangle$
$\rightarrow_{12}$	Atanassov 2	$\langle max(b, c), 1 - max(b, c)\rangle$
$\rightarrow_{13}$	Atanassov ve Kolev	$\langle b + c - b.c, a.d\rangle$
$\rightarrow_{14}$	Atanassov ve Trifonov	$\langle 1 - (1 - c).sg(a - c) - d.\overline{sg}\ (a - c).sg(d - b), d.sg(d - b)\rangle$
$\rightarrow_{15}$	Atanassov 3	$\langle 1 - (1 - min(b, c)).sg(sg(a - c) + sg(d - b)) - min(b, c).sg(a - c).sg(d - b), 1 - (1 - max(a, d)).sg(\overline{sg}\ (a - c) + \overline{sg}\ (d - b)) - max(a, d).\overline{sg}\ (a - c).\overline{sg}\ (d - b)\rangle$

⋮

$\rightarrow_{171}$	$\langle \overline{sg}\ (max(a, d) - max(b, c)), sg(max(a, d) - max(b, c))\rangle$
$\rightarrow_{172}$	$\langle \overline{sg}\ (a - c), sg(a - c)\rangle$
$\rightarrow_{173}$	$\langle \overline{sg}\ (a + d - 1), sg(a + d - 1)\rangle$
$\rightarrow_{174}$	$\langle \overline{sg}\ (1 - b - c), sg(1 - b - c)\rangle$
$\rightarrow_{175}$	$\langle \overline{sg}\ (d - b), sg(d - b)\rangle$

$\rightarrow_{176}$	$\langle \overline{sg}\,(a\ -\ c)\ +\ sg(a\ -\ c)\,max(b,c), sg(a\ -\ c)\,min(a,d)\rangle$
$\rightarrow_{177}$	$\langle \overline{sg}\,(a\ -\ c)\ +\ sg(a\ -\ c)\,max(1-a,c), sg(a\ -\ c)\,min(a,1-c)\rangle$
$\rightarrow_{178}$	$\langle \overline{sg}\,(a\ -1+d)\ +\ sg(a-1+d)(1-min(a,d)), sg(a-1+d)\,min(a,d)\rangle$
$\rightarrow_{179}$	$\langle \overline{sg}(1\ -\ b\ -\ c)\ +\ sg(1-\ b-c)\,max(b,c),$ $sg(1-\ b-c)(1-\ max(b,c))\rangle$
$\rightarrow_{180}$	$\langle \overline{sg}\,(d\ -\ b)\ +\ sg(d\ -\ b)\,max(b,1\ -\ d), sg(d\ -\ b)\,min(1-b,d)\rangle$
$\rightarrow_{181}$	$\langle 1\ -\ sg(a).(1\ -\ c), d.sg(a)\rangle$
$\rightarrow_{182}$	$\langle 1\ -\ sg(a).(1\ -\ c), (1-c).sg(a)\rangle$
$\rightarrow_{183}$	$\langle 1\ -\ sg(a).d, d.sg(a)\rangle$
$\rightarrow_{184}$	$\langle 1\ -\ sg(1-b).d, d.sg(1-b)\rangle$
$\rightarrow_{185}$	$\langle 1\ -\ sg(1-b).(1-c), (1-c).sg(1-b)\rangle$

Doğrudan kontrolle aşağıdaki denklemlerin sağladığını görebiliriz. [13]

$$\langle 0,1\rangle \rightarrow_i \langle 0,1\rangle = \begin{cases} \langle 1,0\rangle \text{ için } i = 1,2,3,\dots,99,102,105,108,\dots,127,129, \\ \quad \dots,132,134,\dots,137,153,166,\dots,185, \\ \langle 0,0\rangle \text{ için } i = 100,101,103,104,106,107,128,133,138, \\ \langle \frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \text{ için } i = 139, \\ \langle \frac{1}{3},\frac{2}{3}\rangle \text{ için } i = 140,142,\dots,145, \\ \langle \frac{2}{3},\frac{1}{3}\rangle \text{ için } i = 141,146,\dots,149, \\ \langle \frac{\lambda+1}{2\lambda},\frac{\lambda-1}{2\lambda}\rangle \text{ için } i = 150,154,\dots,157, \\ \langle \frac{\gamma+2}{2\gamma+1},\frac{\gamma-1}{2\gamma+1}\rangle \text{ için } i = 151,158,\dots,161, \\ \langle \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta},\frac{\beta-1}{\alpha+\beta}\rangle \text{ için } i = 152,162,\dots,165. \end{cases}$$

$$\langle 0,1\rangle \rightarrow_i \langle 1,0\rangle = \begin{cases} \langle 1,0\rangle \text{ için } i = 1,\dots,100,102,103,105,106,108,\dots,112,114,\\ \dots,117,\dots,121,123,\dots,126,128,\dots,132,134,\\ \dots,137,139,\dots,149,153,166,\dots,185, \\ \langle 0,0\rangle \text{ için } i = 101,104,107,113,118,122,127,133,138, \\ \langle \frac{\lambda+1}{2\lambda}, \frac{\lambda-1}{2\lambda}\rangle \text{ için } i = 150,154,\dots,157, \\ \langle \frac{\gamma+2}{2\gamma+1}, \frac{\gamma-1}{2\gamma+1}\rangle \text{ için } i = 151,158,\dots,161, \\ \langle \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}, \frac{\beta-1}{\alpha+\beta}\rangle \text{ için } i = 152,162,\dots,165. \end{cases}$$

$$\langle 1,0\rangle \rightarrow_i \langle 0,1\rangle = \begin{cases} \langle 0,1\rangle \ için \ i = 1,\dots,99,109,149,166,\dots 168,170,\dots,185, \\ \langle 0,0\rangle \ için \ i = 100,\dots,108,169 \\ \langle \frac{\lambda-1}{2\lambda}, \frac{\lambda+1}{2\lambda}\rangle \text{ için } i = 150,154,\dots,157, \\ \langle \frac{\gamma}{2\gamma+1}, \frac{\gamma+1}{2\gamma+1}\rangle \text{ için } i = 151,158,\dots,161, \\ \langle \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta}, \frac{\beta+1}{\alpha+\beta}\rangle \text{ için } i = 152,162,\dots,165 \\ \langle \varepsilon, 1-\eta\rangle \text{ için } için \ i = 153. \end{cases}$$

$$\langle 1,0\rangle \rightarrow_i \langle 1,0\rangle = \begin{cases} \langle 1,0\rangle \text{ için } i = 1,\dots,100,103,106,109,\dots,112,114,\\ \dots,117,119,\dots,122,124,\\ \dots,138,153,166,\dots,185, \\ \langle 0,0\rangle \text{ için } i = 101,102,105,107,108,113,123, \\ \langle 0,\frac{1}{2}\rangle \text{ için } i = 139,150,155,\dots,157 \\ \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle \text{ için } i = 140,142,\dots,145, \\ \langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\rangle \text{ için } i = 141,146,\dots,149, \\ \langle \frac{\gamma+1}{2\gamma+1}, \frac{\gamma}{2\gamma+1}\rangle \text{ için } i = 151,158,\dots,161, \\ \langle \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\rangle \text{ için } i = 152,162,\dots,165. \end{cases}$$

Şimdi ise standart formdaki Modus Ponensi sağlayan implikasyonlar aşağıda verilmiştir. [13]

$$\frac{x \text{ bir totoloji, } x \to y \text{ bir totoloji}}{y \text{ bir totoloji}} \qquad \text{(MP-1)}$$

Eğer $V(x) = V(x \to y) = \langle 1,0 \rangle$ den $V(y) = \langle 1,0 \rangle$

Teorem 2.3.1 Modus Ponens 'in satandart formu (MP-1) aşağıdaki implikasyonlar tarafından sağlanır:

$\to_1, \dots, \to_{19}, \to_{21}, \to_{24}, \dots, \to_{29}, \to_{46}, \dots, \to_{56}, \to_{58}, \dots, \to_{61}, \to_{64}, \to_{66}, \to_{67}, \to_{69}$
$\to_{71}, \dots, \to_{73}, \to_{75}, \dots, \to_{81}, \to_{91}, \dots, \to_{99}, \to_{106}, \dots, \to_{110}, \to_{119}, \to_{120}, \to_{122}, \dots,$
$\to_{128}, \to_{134}, \dots, \to_{138}, \to_{153}, \to_{166}, \dots, \to_{174}, \to_{176}, \to_{177}, \to_{179}, \to_{181}, \to_{182}, \to_{184},$
$\to_{185}$

Standart Modus Ponensi aşağıdaki şekilde modifiye edilmiş hali aşağıda verilmiştir. [13]

$$\frac{x \text{ bir totoloji , } x \to y \text{ bir totoloji}}{y \text{ bir IFT}}, \qquad \text{(MP-2)}$$

$$\frac{x \text{ bir totoloji,} x \to y \text{ bir IFT}}{y \text{ bir totoloji}}, \qquad \text{(MP-3)}$$

$$\frac{x \text{ bir IFT,} x \to y \text{ bir totoloji}}{y \text{ bir totoloji}}, \qquad \text{(MP-4)}$$

$$\frac{x \text{ bir totoloji,} x \to y \text{ bir IFT}}{y \text{ bir IFT}}, \qquad \text{(MP-5)}$$

$$\frac{x \text{ bir IFT,} x \to y \text{ bir totoloji}}{y \text{ bir IFT}}, \qquad \text{(MP-6)}$$

$$\frac{x \text{ bir IFT,} x \to y \text{ bir IFT}}{y \text{ bir totoloji}}, \qquad \text{(MP-7)}$$

$$\frac{x \text{ bir IFT,} x \to y \text{ bir IFT}}{y \text{ bir IFT}}, \qquad \text{(MP-8)}$$

Örneğin yukarıda verilen (MP-8) şartı $\to_4$ implikasyonunu sağlamıyor.

Sezgisel Bulanık implikasyonları;

i. Teorem 2.3.1 sağlar

ii. Aşağıdaki eşitlikleri sağlar

$$\langle 0,1\rangle \rightarrow_i \langle 0,1\rangle = \langle 1,0\rangle$$

$$\langle 0,1\rangle \rightarrow_i \langle 1,0\rangle = \langle 1,0\rangle$$

$$\langle 1,0\rangle \rightarrow_i \langle 0,1\rangle = \langle 0,1\rangle$$

$$\langle 1,0\rangle \rightarrow_i \langle 1,0\rangle = \langle 0,1\rangle$$

şartlarını sağlıyorsa (tam) totoloji tipindeki implikasyonlar(TTT-IFT-implikasyonlar) olarak adlandırılır. [13]

TTT-IF-önermeleri:

$\rightarrow_1, \dots, \rightarrow_{19}, \rightarrow_{21}, \rightarrow_{24}, \dots, \rightarrow_{29}, \rightarrow_{46}, \dots, \rightarrow_{56}, \rightarrow_{58}, \dots, \rightarrow_{61}, \rightarrow_{64}, \rightarrow_{66}, \rightarrow_{67}, \rightarrow_{69}$
$\rightarrow_{71}, \dots, \rightarrow_{73}, \rightarrow_{75}, \dots, \rightarrow_{81}, \rightarrow_{91}, \dots, \rightarrow_{99}, \rightarrow_{109}, \rightarrow_{110}, \rightarrow_{119}, \rightarrow_{120}, \rightarrow_{124}, \dots,$
$\rightarrow_{126}, \rightarrow_{134}, \dots, \rightarrow_{137}, \rightarrow_{166}, \dots, \rightarrow_{168}, \rightarrow_{170}, \dots, \rightarrow_{172}, \rightarrow_{174}, \rightarrow_{176}, \rightarrow_{177},$
$\rightarrow_{179}, \rightarrow_{181}, \rightarrow_{182}, \rightarrow_{184}, \rightarrow_{185}.$

Aşağıda totolojik tipteki önermeler Çizelge 2.23, Çizelge 2.24 gösterilmiştir. [13]

Çizelge 2.23. Totolojik tipteki önermeler

$\neg_1$	$\langle x, b, a\rangle$
$\neg_2$	$\langle x, \overline{sg}\ (a), sg(a)\rangle$
$\neg_3$	$\langle x, b, ab + a^2\rangle$
$\neg_4$	$\langle x, b, 1-b\rangle$
$\neg_5$	$\langle x, \overline{sg}\ (1-b), sg(1-b)\rangle$
⋮	⋮
$\neg_{52}$	$\langle \overline{sg}\ (a) + sg(a)b, a\rangle$
$\neg_{53}$	$\langle \overline{sg}\ (a) + sg(a)(1-a), a\rangle$
$\neg_{54}$	$\langle \overline{sg}\ (1-b) + sg(1-b).b, 1-a\rangle$

Çizelge 2.24. Totolojik tipteki önermeler

$\neg_1$	$\rightarrow_1, \rightarrow_4, \rightarrow_5, \rightarrow_6, \rightarrow_7, \rightarrow_{10}, \rightarrow_{13}, \rightarrow_{61}, \rightarrow_{63}, \rightarrow_{64}, \rightarrow_{66}, \rightarrow_{67}, \rightarrow_{68}, \rightarrow_{69}, \rightarrow_{70}, \rightarrow_{71}, \rightarrow_{72}, \rightarrow_{73}, \rightarrow_{78}, \rightarrow_{80}, \rightarrow_{124}, \rightarrow_{125}, \rightarrow_{127}, \rightarrow_{166}$
$\neg_2$	$\rightarrow_2, \rightarrow_3, \rightarrow_8, \rightarrow_{11}, \rightarrow_{16}, \rightarrow_{20}, \rightarrow_{31}, \rightarrow_{32}, \rightarrow_{37}, \rightarrow_{40}, \rightarrow_{41}, \rightarrow_{42}, \rightarrow_{172}, \rightarrow_{173}, \rightarrow_{181}, \rightarrow_{182}, \rightarrow_{183}$
$\neg_3$	$\rightarrow_9, \rightarrow_{17}, \rightarrow_{20}$
$\neg_4$	$\rightarrow_{12}, \rightarrow_{18}, \rightarrow_{22}, \rightarrow_{46}, \rightarrow_{49}, \rightarrow_{50}, \rightarrow_{51}, \rightarrow_{53}, \rightarrow_{54}, \rightarrow_{91}, \rightarrow_{93}, \rightarrow_{94}, \rightarrow_{95}, \rightarrow_{96}, \rightarrow_{98}, \rightarrow_{134}, \rightarrow_{135}, \rightarrow_{137}, \rightarrow_{169}, \rightarrow_{170}$
$\neg_5$	$\rightarrow_{14}, \rightarrow_{15}, \rightarrow_{19}, \rightarrow_{23}, \rightarrow_{47}, \rightarrow_{48}, \rightarrow_{52}, \rightarrow_{55}, \rightarrow_{56}, \rightarrow_{57}, \rightarrow_{171}, \rightarrow_{174}, \rightarrow_{175}, \rightarrow_{184}, \rightarrow_{185}$
$\neg_6$	$\rightarrow_{24}, \rightarrow_{26}, \rightarrow_{27}, \rightarrow_{65}$
⋮	⋮
$\neg_{52}$	$\rightarrow_{176}$
$\neg_{53}$	$\rightarrow_{177}, \rightarrow_{178}$
$\neg_{54}$	$\rightarrow_{179}, \rightarrow_{180}$

Şimdi ise;
ilk olarak dışlanmış ortanca kanunu(LEM) aşağıdaki şekillerde verilsin. [13]

$\langle a,b\rangle \vee \neg\langle a,b\rangle = \langle 1,0\rangle$ (totoloji-form)

ve

$\langle a,b\rangle \vee \neg\langle a,b\rangle = \langle p,q\rangle$ (IFT-form) $,1 \geq p \geq q \geq 0 \; ve \; p+q \leq 1$

İkinci olarak modifiye edilmiş ortanca dışlanmış kanun aşağıdaki şekilde verilsin. [13]

$\neg\neg\langle a,b\rangle \vee \neg\langle a,b\rangle = \langle 1,0\rangle$ (totoloji-form)

ve

$\neg\neg\langle a,b\rangle \vee \neg\langle a,b\rangle = \langle p,q\rangle$ (IFT-form) $, 1 \geq p \geq q \geq 0 \; ve \; p+q \leq 1$

Yukarıda verilen iki şarta göre aşağıdaki kuralları sağlar. [13]

1. Sadece olumsuzlamalar $\rightarrow_{13}$ totolojiksel formda LEM 'i karşılar.
2. Sadece olumsuzlamalar$\rightarrow_2 ,\rightarrow_5 ,\rightarrow_9 ,\rightarrow_{11},\rightarrow_{13},\rightarrow_{16}$ totolojiksel formda MLEM'i karşılar.
3. Sadece olumsuzlamalar$\rightarrow_2 ,\rightarrow_5 ,\rightarrow_6 ,\rightarrow_{10},\rightarrow_{42},\rightarrow_{44}, \rightarrow_{46},\rightarrow_{47},\rightarrow_{50},\rightarrow_{51}$ IFT formunda LEM'i karşılamaz.
4. Sadece olumsuzlamalar $\rightarrow_{10},\rightarrow_{42},\rightarrow_{44}, \rightarrow_{46},\rightarrow_{47},\rightarrow_{50},\rightarrow_{51}$ IFT formunda MLEM'i karşılamaz.

Üçüncü olarak da olumsuzlamalar şu formata sahiptirler. [13]

$$\neg x \wedge \neg y = \neg\langle x \vee y\rangle$$

$$\neg x \vee \neg y = \neg\langle x \wedge y\rangle$$

x değerlerinin E kümesinden alındığı bir değişken ve $P(x)$, x değişkeni ile bir önerme fonksiyonu olsun. [13]

$$V(P(x)) = \langle \mu(P(x)), \nu(P(x))\rangle$$

gösterilir.

Her ve en az bir niceleyicinin sezgisel bulanık mantıktaki tanımları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. [13]

$$V(\forall x P(x)) = \{\langle x, inf_{y\in E}\mu(P(y)), sup_{y\in E}\, \nu\,(P(y))\rangle : x \in E\}$$

$$V(\exists xP(x)) = \langle sup_{y\in E}\mu(P(y)), inf_{y\in E}\, \nu\,(P(y))\rangle : x \in E\}$$

Bu iki niceleyicinin en önemli özelliği bunların her birinin önerme fonksiyonu P ile IF(sezgisel bulanık)- yorumlayıcı üçgeninde (açıkça her biri bir tane olacak) şekilde yan yana duruyor olmasıdır.

Aşağıda altı niceleyici tanımlanmıştır. [13]

1. $V(\forall_\mu xP(x)) = \{\langle x, inf_{y\in E}\mu(P(y)), \nu(P(x))\rangle : x \in E\}$
2. $V(\forall_\nu xP(x)) = \{\langle x, min(1 - sup_{y\in E}\nu(P(y)), \mu(P(x)), sup_{y\in E}\nu(P(y))\rangle : x \in E\}$
3. $V(\exists_\mu P\,(x)) = \{\langle x, sup_{y\in E}\mu(P(y)), min(1 - sup_{y\in E}\mu(P(y)), \nu(P(x))\rangle : x \in E\}$
4. $V(\exists_\nu P\,(x)) = \{\langle x, \mu(P(x), inf_{y\in E}\nu(P(y)\rangle : x \in E\}$
5. $V(\forall^*_\nu xP(x)) = \{\langle x, min(1 - sup_{y\in E}\nu(P(y)), \mu(P(x)), min(sup_{y\in E}\nu(P(y)), 1 - \mu(P(x))\rangle : x \in E\}$
6. $V(\exists^*_\mu xP(x)) = \{\langle x, min(sup_{y\in E}\mu(P(y)), 1 - \nu(P(x)), min(1 - sup_{y\in E}\mu(P(y)), \nu(P(x))\rangle : x \in E\}$

Açıkça her p önerme fonksiyonu için;

$$V(\forall xP(x)) \subseteq V\,(\forall_\mu xP(x)) \subseteq V\,(\forall_\nu xP(x)) \subseteq V(\exists_\nu xP(x)) \subseteq V(\exists_\mu xP(x)) \subseteq V(\exists xP(x)$$

ve

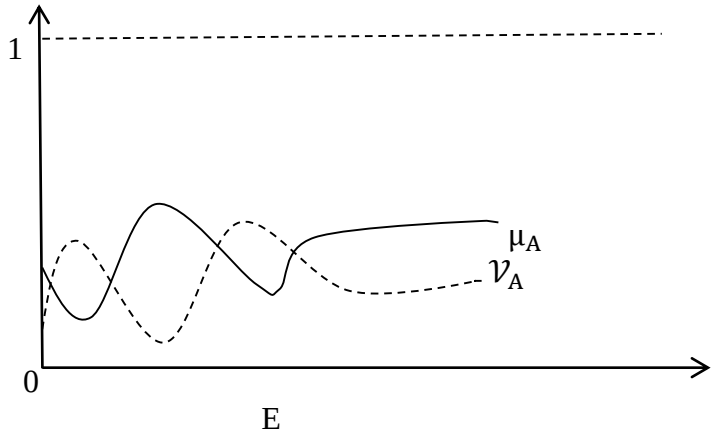
$$V(\forall xP(x)) \subseteq V(\forall_\nu xP(x)) \subseteq (\forall^*_\nu xP(x)) \subseteq V(\exists^*_\mu xP(x)) \subseteq V(\exists_\mu xP(x)) \subseteq V(\exists xP(x))$$

dir. [13]

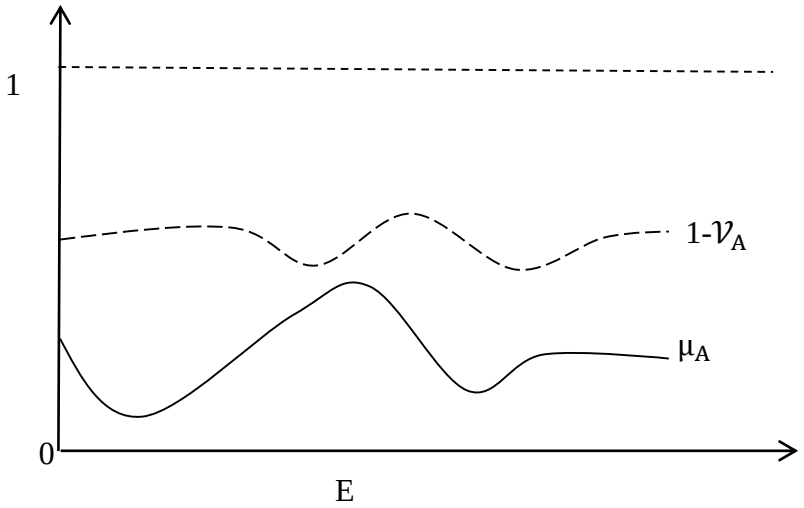
Şimdi ise sezgisel bulanık kümenin, bulanık kümeden farkını ve kümeler üzerinde yapılan işlemlerini aşağıda verelim.

Tanım 2.3.1 X bir evrensel küme olsun. $\mu_A : X \to [0,1]$ *ve* $\nu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonları sırasıyla, $x \in X$ in üye olma derecesi ve üye olmama derecesi olmak üzere,
$A=\{<x, \mu_A, \nu_A > : x\in X\ ,0\leq \mu_A(x)+\nu_A(x) \leq 1\}$ kümesine X , de sezgisel bulanık küme (IFS) denir. X de sezgisel bulanık kümelerin ailesi $IFS(X)$ ile gösterilir. [15]

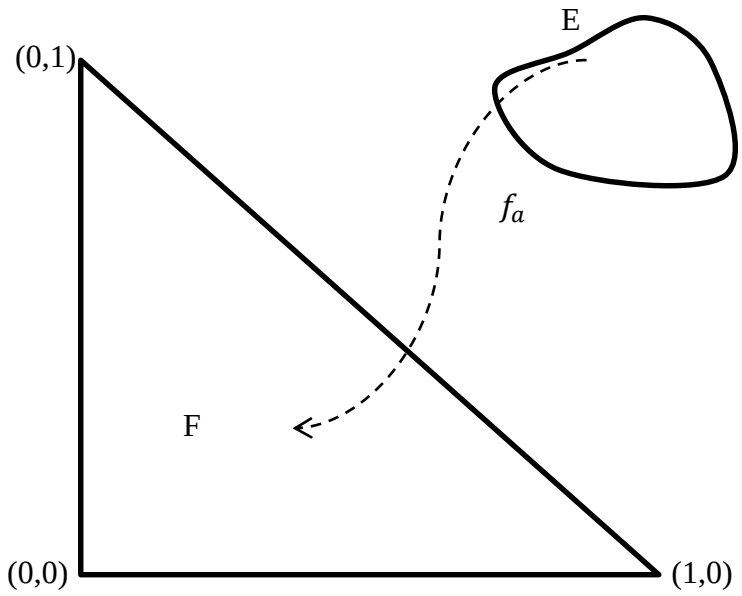
Sezgisel Bulanık kümeler farklı geometrik gösterimlere sahiptir. Aşağıda şekil 2.3, şekil 2.4 ve şekil 2.5 de sezgisel bulanık kümelerin farklı geometrik gösterimleridir [15]



Şekil 2.3. sezgisel bulanık küme geometrik gösterimi



Şekil 2.4 sezgisel bulanık küme geometrik gösterimi



Şekil 2.5 sezgisel bulanık küme geometrik gösterimi

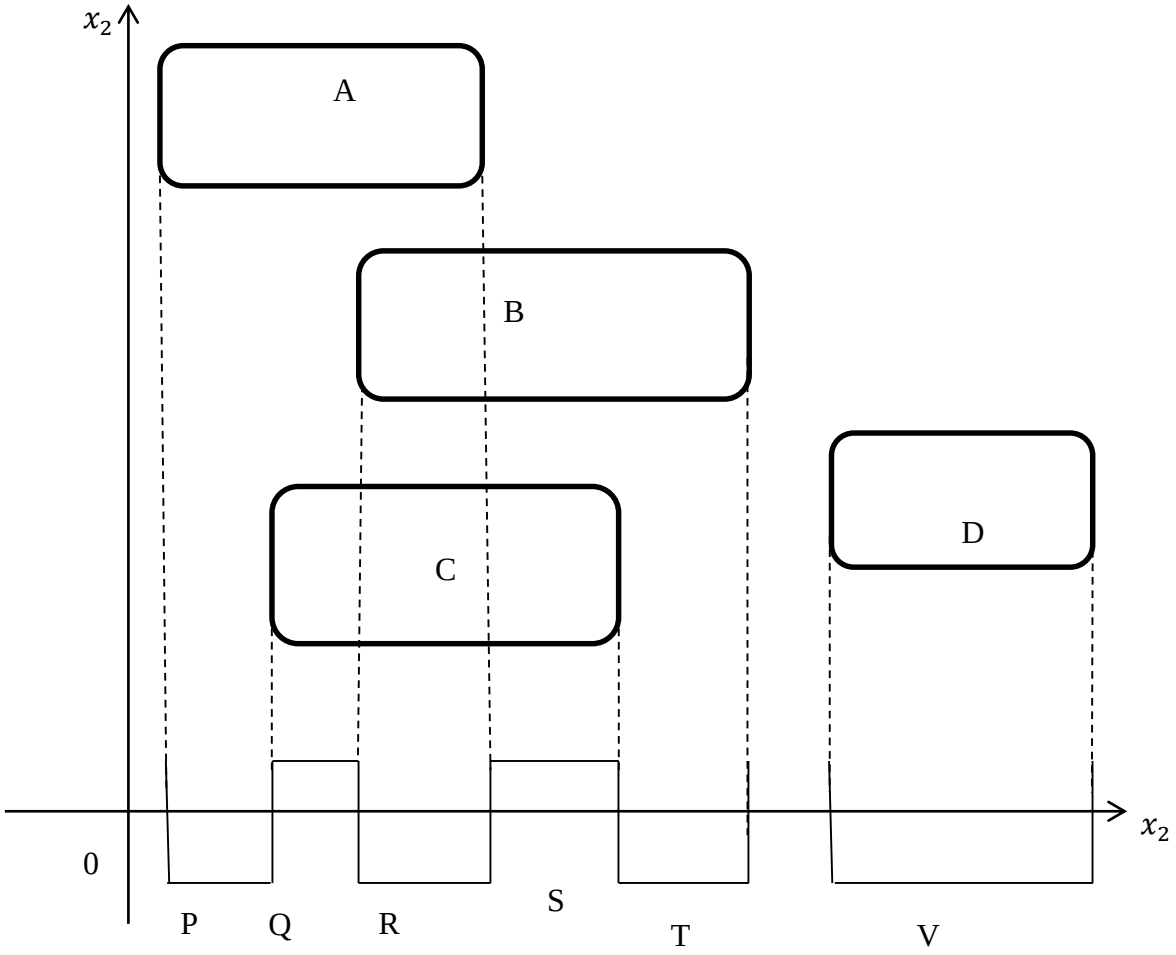
Tanım 2.3.2 X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olsun.

$\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x))$ değerine x in A kümesindeki hassasiyet(sezgi) derecesi denir. [15]

Tanım 2.3.3 X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olmak üzere $\exists x \in X$ için $\pi_A(x) > 0$ ise A kümesine öz sezgisel bulanık küme denir. [15]

Şimdi sezgisel bulanık küme teorinin, bulanık küme teorinin kesin genişlemesi olduğunu gösteren öz sezgisel bulanık kümeye örnek vererek gösterelim. [14]

Örnek 2.3.1 A, B, C ve D kümeleri öklit düzleminde, kapalı, konveks, bağlantılı ve kompakt ve $A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$ olsun. Şekil 25. deki Ox_1x_2 koordinat düzlemi verilsin ve $P \cup Q \cup R$, $Q \cup R \cup S$, $R \cup S \cup T$ ve V kümeleri sırası ile A, B, C ve D kümelerinin Ox_1 ekseni üzerinde dik izdüşümleri olsun. X kümesinin Ox_1 eksenine dik uzanan bölümünün Ox_1 ekseninde ki y noktasına uzaklığı $\ell(y, X)$ ile göstereceğiz. Örnek 2.3.1 in geometrik gösterimi şekil 2.6 da gösterilmiştir. [14,16]



Şekil 2.6 örnek 2.3.1 in geometrik gösterimi

$E = A \cup B \cup C \cup D$ evrensel küme olsun ve F, G kümeleri aşağıdaki koşulları sağlasın.

i. $A \subset F \subset A \cup C \cup D$,
ii. $B \subset G \subset B \cup C \cup D$,
iii. $F \cap G = \emptyset$
iv. $F \cup G \subset E$

iii, iv koşullarından F kümesi öz olarak G nin tümleyenin de içerildiği görülür ve i,ii koşullarından $F = A$ ve $G = B$ durumlarının dahil olmadığı açıktır.

E deki noktaların sadece Ox_1 eksenindeki izdüşümlerini inceleyebildiğimizi ve $\forall x \in E$ için sadece $\ell(y, X)(X = A, B, C$ veya $D)$ değerini bildiğimiz kabul edelim.
y elemanı için;
$y \in P$ ise $x \in A$ olacak şekilde bir x in izdüşümüdür. $A \subset F$ olduğundan $\mu_F(x) = 1$ dir.
$y \in Q$ ise $x \in A$ veya $x \in C$ olacak şekilde bir x in izdüşümüdür.

$x \in A \Rightarrow x \in F$ ve $x \in C \Rightarrow x \in F$ V $x \in G$ dir.Bu durumda X in F deki üye olma dercesi ;

$\mu_F(x) = \frac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}$ dir.

Aynı şekilde incelemeye devam edildiğinde;

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, y \in P \\ \dfrac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}, y \in Q \\ \dfrac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,B)+\ell(y,C)}, y \in R \\ 0 \quad , y \in S \cup T \cup V \end{cases}$$

ve

$$\nu_F(x) = \begin{cases} 0, y \in P \cup Q \cup V \\ \dfrac{\ell(y,B)}{\ell(y,B)+\ell(y,C)}, y \in S \\ \dfrac{\ell(y,B)}{\ell(y,A)+\ell(y,B)+\ell(y,C)}, y \in R \\ 1 \quad , y \in T \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $\pi_A(x)$ fonksiyonunun değeri;

$$\pi_F(x) = \begin{cases} 0, y \in P \cup T \\ \dfrac{\ell(y,C)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}, y \in Q \\ \dfrac{\ell(y,C)}{\ell(y,A)+\ell(y,B),\ell(y,C)}, y \in R \\ \dfrac{\ell(y,C)}{\ell(y,B)+\ell(y,C)}, y \in S \\ 1, \quad y \in V \end{cases}$$

dir. Bu arada $\pi_A(x)$>0 değeri inşa edilen kümenin öz sezgisel bulanık küme olduğunu gösterir.

Şimdi sezgisel bulanık kümeler üzerindeki bazı işlemler aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 2.3.4 X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}$$

$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle : x \in X\}$$

olmak üzere;

i. $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in X\,, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)\ ve\ \nu_A(x) \geq \nu_B(x)$ (içerme)

ii. $A = B :\Leftrightarrow\ A \subseteq B \wedge B \subseteq A$ (eşitlik)

iii. $A \cap B = \{\langle x, min(\ \mu_A(x), \mu_B(x)\ ), max(\nu_A(x), \nu_B(x)\ )\rangle :\ x \in X\}$(kesişim)

iv. $A \cup B = \{\langle x, max(\ \mu_A(x), \mu_B(x)\ ), min(\nu_A(x), \nu_B(x)\ )\rangle :\ x \in X\}$(birleşim)

v. $A^c = \{\langle x, \nu_A(x), \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$ (tümleyen)

vi. $A + B = \{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x).\nu_B(x)\rangle :\ x \in X\}$

vii. $A.B = \{\langle x, \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x).\nu_B(x)\rangle : x \in X\}$

viii. $A@B = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$

ix. $A\$B = \{\langle x, \sqrt{\mu_A(x).\mu_B(x)}, \sqrt{\nu_A(x).\nu_B(x)}\rangle : x \in X\}$

x. $A\#B = \left\{\langle x, \frac{2\mu_A(x)\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)}, \frac{2\nu_A(x)\nu_B(x)}{\nu_A(x)+\nu_B(x)}\rangle : x \in X\right\}$ (Bu eşitlikte eğer $\mu_A(x) = \mu_B(x) =$ 0 alınırsa $\frac{2\mu_A(x)\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)} = 0$, veya $\nu_A = \nu_B(x) = 0$ alınırsa $\frac{2\nu_A(x)\nu_B(x)}{\nu_A(x)+\nu_B(x)} = 0$ olur.

xi. $A\ *\ B = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{2(\mu_A(x).\mu_B(x)+1)}, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2(\nu_A(x)\nu_B(x)+1)}\rangle : x \in X\right\}$

xii. $A \rightarrow B = \{\langle x, max(\nu_A(x), \mu_B(x)), min\ (\mu_A(x), \nu_B(x)\ )\rangle : x \in X\}$

dir.[16,15]

Yukarıda verdiğimiz işlemlerin bazıları Atanassov tarafından incelenmiş olup bazıları aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.2 X bir evrensel küme, $A, B \in IFS(X)$ olsun. [16]

i. $A \cap B = B \cap A$
ii. $A \cup B = B \cup A$
iii. $A + B = B + A$
iv. $A.B = B.A$

Teorem 2.3.3 X bir evrensel küme , $A, B, C \in IFS(X)$ olsun. [16]

i. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
ii. $(A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C)$
iii. $(A \cap B).C = (A.C) \cap (B.C)$

Bizimde bu çalışmamızda kullanacağımız, Atanassov'un 1999 yılında tanıttığı ve incelediği sezgisel bulanık küme operatörlerin tanımını vereceğiz. Bu operatörlerden, sezgisel bulanık kümeyi, bulanık kümeye dönüştüren iki operatör aşağıda tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.5 X evrensel küme ,$A \in IFS(X)$ olsun. [16]

i. $\Box A = \{\langle x, \mu_A(x) ,1 - \mu_A(x) \rangle : x \in X\} = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$
ii. $\Diamond A = \{\langle x, 1 - \nu_A(x) , \nu_A(x) \rangle : x \in X\} = \{\langle x, 1 - \nu_A(x) \rangle : x \in X\}$

Not 2.3.2 X evrensel küme olmak üzere $A \in FS(X)$ olsun. $\Box A = A = \Diamond A$

A kümesi öz sezgisel bulanık küme ise, $\Box A \subset A \subset \Diamond A$ ve $\Box A \neq A \neq \Diamond A$

dır. [16]

Bu durum sezgisel bulanık kümelerin, bulanık kümelerin bir genellemesi olduğunu gösteren bir örnektir.

Teorem 2.3.4 X bir evrensel küme , $A \in IFS(X)$ için;

i. $\Box A = (\Diamond A^c)^c$
ii. $\Diamond A = (\Box A^c)^c$

dır. [16]

Teorem 2.3.5 X bir evrensel küme , $A \in IFS(X)$ için;

i. $\Box (A \cup B) = \Box A \cup \Box B$
ii. $\Box (A \cap B) = \Box A \cap \Box B$
iii. $\Diamond (A \cup B) = \Diamond A \cup \Diamond B$
iv. $\Diamond (A \cap B) = \Diamond A \cap \Diamond B$

dir. [16]

Teorem 2.3.6 X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ için;

i. $\Box\Box A = \Box A$
ii. $\Box \Diamond A = \Diamond A$
iii. $\Diamond \Box A = \Box A$
iv. $\Diamond\Diamond A = \Diamond A$

dir. [16]

3. Sezgisel Bulanık Kümede Uygulamalar

Bu kısımda sezgisel bulanık kümede, sezgisel bulanık küme operatörlerin yardımıyla yeni eşitler elde edilmiştir.

Teorem 3.1. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}$$

$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle : x \in X\}$$

olmak üzere;

$$\Box A @ \Box B \; = \; \Box \, (A @ B)$$

dir. [17]

İspat:

i. $\Box A = \{\langle x, \mu_A(x) \,, 1 - \mu_A(x) \,\rangle : x \in X\} = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle : x \in X\}$

ii. $\Box B = \{\langle x, \mu_B(x) \,, 1 - \mu_B(x) \,\rangle : x \in X\} = \{\langle x, \mu_B(x)\rangle : x \in X\}$

olsun.

$$\Box A @ \Box B = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2}, \frac{1 - \mu_A(x) + 1 - \mu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Box A @ \Box B = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2}, 1 - \frac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Box A @ \Box B \; = \; \Box \, (A @ B)$$

Teorem 3.2. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$A = \{\langle x, \mu_A(x), \nu_A(x)\rangle : x \in X\}$$

$$B = \{\langle x, \mu_B(x), \nu_B(x)\rangle : x \in X\}$$

olsun.

$$\Diamond \, A @ \Diamond \, B \; = \Diamond \, (A @ B)$$

dir. [17]

İspat:

i. $\Diamond \, A = \{\langle x, 1 - \; \nu_A(x) \,, \nu_A(x) \,\rangle : x \in X\} = \{\langle x, 1 - \; \nu_A(x) \,\rangle : x \in X\}$

ii. $\Diamond \, B = \{\langle x, 1 - \; \nu_B(x) \,, \nu_B(x) \,\rangle : x \in X\} = \{\langle x, 1 - \; \nu_B(x) \,\rangle : x \in X\}$

olsun.

$$\Diamond A@\Diamond B = \left\{\langle x, \frac{1-\nu_A(x)+1-\nu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)\ \rangle+\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Diamond A@\Diamond B = \left\{\langle x, 1-\frac{\nu_A(x)\ +\nu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)\ +\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Diamond A@\ \Diamond B\ = \Diamond (A@B)$$

Teorem 3.3. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$(\Box A + \Box B)\ @\ (\Box A.\Box B)\ =\ \Box A@\Box B$$

dir. [17]

İspat:

$$(\Box A + \Box B) = \{\langle x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), (1-\mu_A(x))\ (1-\mu_B(x))\rangle : x \in X\}$$

$$(\Box A.\Box B) = \{\langle x, \mu_A(x).\mu_B(x), 1-\mu_A(x) + 1-\mu_B(x) - (1-\mu_A(x))\ (1-\mu_B(x)) \rangle : x \in X\}$$

$$(\Box A + \Box B)\ @\ (\Box A\ .\Box B) = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{2}, 1-\frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Box A + \Box B)\ @\ (\Box A.\Box B)\ =\ \Box A@\Box B$$

Teorem 3.4. $X \neq \emptyset$, X *bir evrensel küme* $A, B \in IFS(X)$ *olmak üzere*,

$$(\Diamond A + \Diamond B)\ @\ (\Diamond A.\Diamond B)\ = \Diamond A@\ \Diamond B$$

dir. [17]

İspat:

$$(\Diamond A + \Diamond B)\ = \{\langle x, 1-\ \nu_A(x) + 1-\ \nu_B(x)\ -\ (1-\ \nu_A(x))(1-\ \nu_B(x)), \nu_A(x).\nu_B(x)\rangle :\ x \in X\}$$

$$(\Diamond A.\Diamond B) = \{\langle x, \left(1-\ \nu_A(x)\right).(1-\ \nu_B(x)), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x).\nu_B(x)\rangle : x \in X\}$$

$$(\Diamond A + \Diamond B)\ @\ (\Diamond A.\Diamond B)\ = \left\{\langle x, \frac{2-\nu_A(x)-\nu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Diamond A + \Diamond B)\ @\ (\Diamond A.\Diamond B)\ = \Diamond A@\ \Diamond B$$

Teorem 3.5. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$[(\Box A@\Box B)\ \$\ (\Box A\#\Box B)]\ =\ \Box A\$\Box B$$

dir. [17]

İspat:

$$\Box A@\Box B = \left\{\langle x, \frac{\mu_A(x)+\mu_B(x)}{2}, \frac{1-\mu_A(x)+1-\mu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Box A \# \Box B) = \left\{\langle x, \frac{2\mu_A(x)\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)}, \frac{2(1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x))}{(1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x))}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Box A @ \Box B)\ \$\ (\Box A \# \Box B) = \{\langle x, \sqrt{\mu_A(x).\mu_B(x)}, \sqrt{(1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x))}\rangle : x \in X\}$$

$$(\Box A @ \Box B)\ \$\ (\Box A \# \Box B) = \Box A \$ \Box B$$

Teorem 3.6. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$[(\Diamond A\ @\ \Diamond B)\$\ (\Diamond A\ \#\ \Diamond B)] = \Diamond A\ \$\ \Diamond B$$

dir. [17]

İspat:

$$(\Diamond A @ \Diamond B) = \left\{\langle x, \frac{1-\nu_A(x)+1-\nu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Diamond A \# \Diamond B) = \left\{\langle x, \frac{2(1-\nu_A(x))(1-\nu_B(x))}{(1-\nu_A(x))+(1-\nu_B(x))}, \frac{2\nu_A(x).\nu_B(x)}{\nu_A(x)+\nu_B(x)}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Diamond A @ \Diamond B)\ \$\ (\Diamond A \# \Diamond B) = \{\langle x, \sqrt{(1-\nu_A(x))(1-\nu_B(x))}, \sqrt{(\nu_A(x).\nu_B(x)}\rangle : x \in X\}$$

$$(\Diamond A @ \Diamond B)\ \$\ (\Diamond A \# \Diamond B) = \Diamond A \$ \Diamond B$$

Teorem 3.7. $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$\Box\,[(\Diamond A @ \Diamond B)^c] = [\Diamond (A @ B)]^c$$

dir. [17]

İspat:

$$(\Diamond A @ \Diamond B) = \left\{\langle x, \frac{1-\nu_A(x)+1-\nu_B(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$(\Diamond A @ \Diamond B)^c = \left\{\langle x, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}, \frac{1-\nu_A(x)+1-\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Box\,[(\Diamond A @ \Diamond B)^c] = \left\{\langle x, \frac{\nu_A(x)+\nu_B(x)}{2}, \frac{1-\nu_A(x)+1-\nu_B(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$\Box\,[(\Diamond A @ \Diamond B)^c] = [\Diamond (A @ B)]^c$$

Teorem 3.8 $X \neq \emptyset$, X bir evrensel küme $A, B \in IFS(X)$ olmak üzere,

$$[(\Box A + \Diamond B)^c @ ((\Box A)^c . \Diamond B)] \cup (\Box A)^c = (\Box A)^c$$

dir. [17]

İspat:

$$(\Box A + \Diamond B)^c = \{\langle x, \nu_B(x) - \mu_A(x)\ \nu_B(x), \mu_A(x) + 1 - \nu_B(x) - \mu_A(x) + \mu_A(x)\ \nu_B(x)\rangle :\ x \in X\ \}$$

$$(\Box A)^c = \{\langle x, 1-\mu_A(x)\,, \mu_A(x)\ \rangle : x \in X\}$$

$$((\Box A)^c .\Diamond B) = \{\langle x, 1-\mu_A(x)\ -\nu_B(x)+\mu_A(x)\nu_B(x)\,, \mu_A(x)+\nu_B(x)\ -\mu_A(x)\nu_B(x)\rangle :\ x \in X\ \}$$

$$(\Box \mathrm{A} +\Diamond \mathrm{B})^c @((\Box A)^c .\Diamond B) = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{x}, \frac{\nu_B(x)-\mu_A(x)\nu_B(x)+1-\mu_A(x)\ -\nu_B(x)+\mu_A(x)\nu_B(x)}{2}\,, \\ \langle \frac{\mu_A(x)+1-\ \nu_B(x)-\mu_A(x)+\ \mu_A(x)\nu_B(x)+\mu_A(x)+\nu_B(x)\ -\mu_A(x)\nu_B(x)}{2} \rangle\, x: X \end{matrix} \right\}$$

$$(\Box A +\Diamond B)^c @((\Box A)^c .\Diamond B) = \left\{\langle x, \frac{1-\mu_A(x)}{2}, \frac{1+\mu_A(x)}{2}\rangle : x \in X\right\}$$

$$[(\Box A +\Diamond B)^c @((\Box A)^c .\Diamond B)] \cup (\Box A)^c = \{\langle x, 1-\mu_A(x)\,, \mu_A(x)\ \rangle : x \in X\}$$

$$[(\Box A +\Diamond B)^c @((\Box A)^c .\Diamond B)] \cup (\Box A)^c = (\Box A)^c$$

KAYNAKLAR

[1] Paksoy,T. ,Yapıcı Pehlivan, N. , Özceylan, E., Bulanık Küme Teorisi. Nobel Akademik Yayıncılık, ISBN:978-605-133-514-8 , Türkiye , 214s. (2013)

[2] Akkaş,S., Hacısalihoğlu H.H., Özel Z., Sabuncuoğlu A., Soyut Matematik. Gazi Üniversitesi No:43 , Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No:6 , 549s. (1998)

[3] Kennet H. Rosen. Ayrık Matematik Ve Uygulamaları.(Editörler: Akın, Ö., Özbayoğlu, M.,). Palme Yayınevi, ISBN:978-605-355-357-1, 903s. (2015)

[4] Arıkan, A., Halıcıoğlu, S., Soyut Matematik. Palme Yayınevi, ISBN: 978-605-355-073-0 ,345s. (2013)

[5] Karakaş, H., Matematiğin Temelleri. ODTÜ Yayıncılık, ISBN:978-975-7064-42-8 , 322s. (2011)

[6] Hacısalihoğlu ,H., Hacıyev, A., Kalantarov V., Sabuncuoğlu, A., Matematik Terimleri Sözlüğü. Türk Dil Kurumu Yayınları,ISBN:975-16-1264-0, 677s. (2009)

[7] Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., Halıcıoğlu, S., Temel Matematik Kavramların Künyesi. Gazi Kitabevi, ISBN:978-605-344-137-3 ,604s. (2014)

[8] Zehra, B., Bulanık Doğrusal Programlama. Ekin Basım Yayın, ISBN:978-605- 5335-05-2 , 226s. (2011)

[9] Baykal, N., Beyan, T., Bulanık Mantık İlke Ve Temelleri. Bıçaklar Kitabevi, ISBN:975-8695-08-8 ,413s. (2004)

[10] Baykal, N., Beyan, T., Bulanık Mantık Uzman Sistemler Ve Denetleyiciler. Bıçaklar Kitabevi, ISBN: 975-8695-09-6 , 509s. (2004)

[11] Zadeh, L.A. (1965) . Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8 : 338 -353.

[12] Türkşen, İ.B., Dereceli (Bulanık) Sistem Modelleri. Abaküs Kitap, ISBN:978-605 9129-22-0, 295s. (2015)

[13] Atanassov K.T. On Intuitionistic Fuzzy Sets Theory. Springer, ISBN:978-3-642-29126-5, 327s. (2012)

[14] Yılmaz, S., Intuitionistic Fuzzy Model Operatörlerinin Intuitionistic Fuzzy Yapılarla İlişkileri. Yüksek Lisans Tezi. Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Mersin ,75s (2012).

[15] Atanassov K.T. Intuitionistic Fuzzy Sets. *Fuzzy Sets And Systems,* 20 (1) : 87-96. (1986)

[16] Atanassov K.T. Intuitionistic Fuzzy Sets , Tehory and Applications, Springer , ISBN:978-3-7908-2463-6, 335s. (1999)

[17] Eker, E., Tuğrul, F., Çitil, M., New Equalites On The Intuitionistic Fuzzy Operators and Operations. *Notes On Intuitionistic Fuzzy Sets.* 21 (4) :124 128.(2015).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, soyadı	: Erkan EKER
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 19.01.1984, Isparta
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (505) 943 90 99
e-posta	: erkan3327@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	KSÜ / Matematik Anabilim Dalı	2016
Lisans	İnönü Üniversitesi / Matematik Bölümü	2005
Lise	Hacı Sabancı Lisesi	2000

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Eker, E., Tuğrul, F., Çitil, M., New Equalites On The Intuitionistic Fuzzy Operators and Operations. *Notes On Intuitionistic Fuzzy Sets.* 21 (4) :124-128.(2015).

Hobiler

Matematik, Yüzme, Futbol, Masa tenisi, Kitap okuma